

Боднар М. О.

9

# МАТЕМАТИКА

ІНТЕРАКТИВНИЙ  
ЕЛЕКТРОННИЙ  
ПОСІБНИК

## ЗАВДАННЯ З ПАРАМЕТРАМИ

$$ax = b$$

$$|x| = a \begin{cases} ax + 2y = 6, \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

$$(a + 1)x > a^2 - 1$$

$$\frac{ax + 6}{x - 2} = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

# ПЕРЕДМОВА

*Шановні користувачі!*

Вітаємо вас в інтерактивному посібнику з математики, присвяченому розв'язуванню задач з параметрами. Цей посібник стане вашим надійним помічником у вивченні цього цікавого та важливого розділу шкільного курсу математики.

Для ефективної роботи з додатком вам необхідно зберегти цей PDF-файл на своєму пристрої (комп'ютері) та відкривати його за допомогою програми **Adobe® Acrobat® Reader** версії 7.0 або вищої.

Посібник складається з двох основних частин: *теоретичної*, яка містить пояснення та приклади, та *практичної*, де ви зможете виконати інтерактивні завдання з миттєвою перевіркою відповідей. Після кожного пункту вам пропонується *самостійна робота*, що включає різні типи тестових завдань.

У посібнику використано 5 форматів інтерактивних завдань.

**З однією правильною відповіддю.** Ви маєте обрати правильну відповідь, натиснувши на відповідну комірку. Обрані комірки стануть жовтими. Після натискання кнопки «Перевірити», правильна комірка стане зеленою, а неправильна — червоною.

**На встановлення відповідності.** Вам потрібно обрати комірку на перетині номера завдання та літери правильної відповіді. Обрані комірки спочатку стають жовтими, а після перевірки — зеленими або червоними залежно від правильності вибору.

**З кількома правильними відповідями.** Ви вибираєте кілька правильних варіантів, які позначаються символом «✓». Після перевірки правильні відповіді стануть зеленими, а неправильні — червоними із позначкою «X».

**З короткою числовою відповіддю.** Уведіть відповідь у вигляді десяткового дробу в спеціальне кольорове поле. Після перевірки поле стане зеленим для правильної відповіді і червоним для неправильної.

**Відповідь з переліку.** Ви обираєте правильний варіант із наданого списку. Після перевірки правильна відповідь стане зеленою, а неправильна — червоною. Якщо потрібно, ви можете скасувати вибір, натиснувши кнопку «Скасувати».

Після кожного розділу теорії на вас чекає самостійна робота, що включає завдання з однією правильною відповіддю, завдання на встановлення відповідності та завдання з короткою числовою відповіддю. Щоб побачити свій результат, оберіть функцію «Завершити». Це дозволить не тільки перевірити, чи правильно ви розв'язали завдання, але й побачити правильні відповіді, де ваші правильні варіанти стануть зеленими, а неправильні — червоними.

Пам'ятайте, що до моменту завершення тестування ви можете змінювати свої відповіді. Після його завершення це буде неможливо.

*Успіхів у навчанні!*

# РОЗДІЛ 1. ПОВТОРЕННЯ

## 1 РІВНЯННЯ

### ПРИГАДАЙТЕ

**Рівняння** – рівність, що містить змінну (невідоме).

**Корінь (розв'язок) рівняння з однією змінною** – значення змінної, яке перетворює рівняння в правильну числову рівність.

**Розв'язати рівняння** означає знайти всі його корені або довести, що їх немає.

Рівняння є основним інструментом математики, який використовується для опису та вирішення різних задач. У цьому розділі ми повторимо основні типи рівнянь, вивчені в середній школі, зокрема лінійні, квадратні, дробово раціональні рівняння, а також ключові способи їх розв'язання.

## 1 Лінійні рівняння

**Лінійне рівняння з однією змінною** – це рівняння виду  $ax = b$ , де  $x$  – змінна,  $a$  і  $b$  – деякі числа.

Числа  $a$  і  $b$  – коефіцієнти рівняння, які часто називають **параметрами** цього рівняння.

*Зверніть увагу!* Рівняння виду  $5x = 3$ ,  $\frac{x}{2} = 4$  та  $0,6x = -0,24$  є лінійними, а рівняння виду  $|x| = 6$ ,  $x^2 - 2x = 0$  та  $\frac{2}{x} = 4$  не є лінійними.

**МАТХВИЛКА** Укажіть лінійне рівняння з однією змінною. **Перевірити**

А	Б	В	Г	Д
$2x^2 = 2$	$3x = 4y$	$\frac{5}{x-3} = 2$	$-7x = 2$	$4\sqrt{x} = 1$

Рівняння  $ax = b$  можуть мати три випадки розв'язання: мати *один* корінь, *не мати* коренів та мати *безліч* коренів.

ПЕРШИЙ ВИПАДОК	ДРУГИЙ ВИПАДОК	ТРЕТІЙ ВИПАДОК
Якщо $a \neq 0$ , то $x = \frac{b}{a}$	Якщо $a = 0$ і $b \neq 0$ , то коренів немає	Якщо $a = 0$ і $b = 0$ , то $x$ – будь-яке число

**МАТХВИЛИНКА** Установіть відповідність між рівнянням (1–3) та кількістю його коренів (А – Д).

Перевірити

Рівняння	Кількість коренів рівняння																									
1 $-3x = 10$	А жодного	<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>А</th> <th>Б</th> <th>В</th> <th>Г</th> <th>Д</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <th>1</th> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <th>2</th> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <th>3</th> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>		А	Б	В	Г	Д	1						2						3					
	А		Б	В	Г	Д																				
1																										
2																										
3																										
2 $0x = 3$	Б один																									
3 $0x = 0$	В два																									
	Г три																									
	Д безліч																									

Під час розв'язування багатьох рівнянь застосовують їх *тотожні перетворення* та користуються *властивостями рівнянь*.

**ПРИКЛАД 1.** Розв'яжіть рівняння

$$(x + 2)^2 = (x - 4)(x + 4).$$

**ПРИГАДАЙТЕ**

- ▶  $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$
- ▶  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- ▶  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Рівняння	$(x + 2)^2 = (x - 4)(x + 4)$
Розкриємо дужки	$x^2 + 4x + 4 = x^2 - 16$
Перенесемо змінні в ліву частину рівняння, а числа – у праву	$x^2 + 4x - x^2 = -16 - 4$
Зведемо подібні доданки	$4x = -20$
Аналізуємо рівняння та записуємо відповідь	$x = \frac{-20}{4} = -5$

Відповідь:  $-5$ . ◀

**МАТХВИЛИНКА** Укажіть проміжок, якому належить корінь рівняння  $x(x + 3) = (x - 6)^2$ .

Перевірити

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -3]$	$(-3; 0]$	$(0; 1]$	$(1; 3]$	$(3; +\infty)$

Розглянемо приклад розв'язування рівняння, ускладненого дробами. Для цього скористаємося властивістю *множення обох частин рівняння на деяке число*.

**ПРИКЛАД 2.** Розв'яжіть рівняння  $\frac{x-2}{3} - \frac{x+1}{4} = \frac{5x+8}{6}$ .

Рівняння	$\frac{x-2}{3} - \frac{x+1}{4} = \frac{5x+8}{6}$
Помножимо обидві частини рівняння на 12 – найменше спільне кратне чисел 3, 4 та 6	$12 \cdot \frac{x-2}{3} - 12 \cdot \frac{x+1}{4} = 12 \cdot \frac{5x+8}{6}$
Зведемо рівняння до лінійного	$4(x-2) - 3(x+1) = 2(5x+8);$ $4x - 8 - 3x - 3 = 10x + 16;$ $x - 11 = 10x + 16;$ $x - 10x = 16 + 11;$ $-9x = 27$
Розв'яжемо отримане лінійне рівняння	$x = \frac{27}{-9} = -3$

Відповідь:  $-3$ . ◀

**МАТХВИЛИНКА** Розв'яжіть рівняння  $0,5(3x-4) = \frac{x+1}{4}$ .

Перевірити

<b>А</b>	<b>Б</b>	<b>В</b>	<b>Г</b>	<b>Д</b>
$\frac{5}{7}$	$-\frac{7}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{9}{5}$	6

### ПЕРЕВІРТЕ СВОЮ КОМПЕТЕНТНІСТЬ

**1** Серед наведених рівнянь укажіть лінійні.

Перевірити

$$8x - 3 = 5;$$

$$\frac{x-5}{x+5} = 0;$$

$$|x+3| = 1;$$

$$0x = 6;$$

$$\frac{x+2}{3} = \frac{x}{6};$$

$$\frac{2}{3}x = 0.$$

**2** Розв'яжіть рівняння  $-6x = 3$ .

Відповідь:  $x =$

Перевірити

**3** Розв'яжіть рівняння  $0,1x = 10$ .

Відповідь:  $x =$

Перевірити

4 Розв'яжіть рівняння  $\frac{5}{6}x = -15$ .

Відповідь:  $x =$

Перевірити

5 Розв'яжіть рівняння  $2x - 3 = 7$ .

Відповідь:  $x =$

Перевірити

6 Розв'яжіть рівняння  $5x + 2 = 3x - 4$ .

Відповідь:  $x =$

Перевірити

7 Розв'яжіть рівняння  $2(x - 3) = x + 3$ .

Відповідь:  $x =$

Перевірити

8 Укажіть рівняння, які не мають коренів.

$$2x = x + x;$$

$$5x - 7 = 7x - 5;$$

$$4x + 5 = 5;$$

$$-4(1 - x) = 4x - 4;$$

$$x + 2 = x - 2;$$

$$3x - 5 = 3(x - 5).$$

Перевірити

9 Укажіть рівняння, які мають безліч коренів.

$$3x = x - x;$$

$$3x + 2 = 6x - 4;$$

$$2x - 2x = 0;$$

$$5x + 5 = 5(x + 5);$$

$$4x = 4x + 1;$$

$$-2(x - 3) = 6 - 2x.$$

Перевірити

10 Розв'яжіть рівняння  $x(x - 2) = x^2 + 4$ .

Відповідь:  $x =$

Перевірити

11 Розв'яжіть рівняння  $5x(3x - 2) - 15x(4 + x) = 70$ .

Відповідь:  $x =$

Перевірити

12 Розв'яжіть рівняння  $(x + 5)(x - 5) = (x - 1)^2$ .

Відповідь:  $x =$

Перевірити

**13** Розв'яжіть рівняння  $(2x - 1)^2 = (2x + 3)^2$ .

Відповідь:  $x =$

Перевірити

**14** Розв'яжіть рівняння  $(5x + 2)^2 - (3x - 5)^2 = (4x - 1)(4x + 1)$ .

Відповідь:  $x =$

Перевірити

**15** Розв'яжіть рівняння  $\frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 7$ .

Відповідь:  $x =$

Перевірити

**16** Розв'яжіть рівняння  $\frac{x - 3}{2} = \frac{x}{3}$ .

Відповідь:  $x =$

Перевірити

**17** Розв'яжіть рівняння  $\frac{2x - 5}{3} = x - 1$ .

Відповідь:  $x =$

Перевірити

**18** Розв'яжіть рівняння  $\frac{5x^2 + x + 13}{5} = x^2 - x + 2$ .

Відповідь:  $x =$

Перевірити

**19** Розв'яжіть рівняння  $\frac{8x - 3}{7} - \frac{3x + 1}{10} = 2$ .

Відповідь:  $x =$

Перевірити

**20** Розв'яжіть рівняння  $\frac{1 + 2x}{2} - \frac{3x - 8}{3} = \frac{x + 4}{6}$ .

Відповідь:  $x =$

Перевірити

## САМОСТІЙНА РОБОТА №1

Завдання 1–5 мають по п'ять варіантів відповіді, з яких лише ОДИН ПРАВИЛЬНИЙ. Виберіть правильний варіант відповіді й позначте його.

1 Укажіть лінійне рівняння.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{8}{x} = 4$	$x^2 = 4x$	$ x - 3  = 2$	$3x - 2 = x^2$	$\frac{x}{10} = 2,5$

2 Укажіть корінь рівняння  $100x = 1$ .

А	Б	В	Г	Д
99	0,01	101	-99	100

3 Розв'яжіть рівняння  $3x - 5 = 5x + 3$ .

А	Б	В	Г	Д
-4	1	10	4	6

4 Укажіть проміжок, якому належить корінь рівняння  $\frac{x}{6} = \frac{3}{8}$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -4)$	$[-4; 0)$	$[0; 2)$	$[2; 4)$	$[4; +\infty)$

5 Розв'яжіть рівняння  $\frac{2x - 5}{3} = \frac{x + 5}{4}$ .

А	Б	В	Г	Д
-7	1	2	-1	7



У завданні 6 до кожного з трьох рядків інформації, позначених цифрами, доберіть один правильний, на Вашу думку, варіант, позначений буквою.

- 6** Установіть відповідність між рівнянням (1–3) та твердженням про його корені (А – Д).

*Рівняння*

**1**  $2(3x - 4) = 6x + 8$

**2**  $3(2x + 5) = 5x + 5$

**3**  $4(2 - x) + 4x = 8$

*Твердження про корені*

**А** Має корінь  $x = 5$ .

**Б** Має безліч коренів.

**В** Має корінь  $x = 0$ .

**Г** Не має коренів.

**Д** Має корінь  $x = -10$ .

	А	Б	В	Г	Д
1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Розв'яжіть завдання 7–8. Одержані числові відповіді запишіть у спеціально відведеному місці. Відповідь записуйте лише десятковим дробом, урахувавши положення коми. Знак «мінус» записуйте перед першою цифрою числа.

- 7** Знайдіть корінь рівняння  $(2x - 1)^2 = x(5x + 2) - (x - 2)(x + 2)$ .

*Відповідь:*

- 8** Знайдіть корінь рівняння  $\frac{4x - 3}{5} - \frac{x + 3}{2} = \frac{x - 5}{4} + \frac{3x - 1}{10}$ .

*Відповідь:*

ЗАВЕРШИТИ

СКАСУВАТИ

## 2 Квадратні рівняння

**Квадратне рівняння** – це рівняння виду  $ax^2 + bx + c = 0$ , де  $a, b, c$  – деякі числа, причому  $a \neq 0$ .

Розрізняють *повні* і *неповні* квадратні рівняння.

**Повні квадратні рівняння** – це рівняння виду  $ax^2 + bx + c = 0$ , де  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$  і  $c \neq 0$ . *Наприклад*,  $3x^2 - x - 2 = 0$  є повним квадратним рівнянням.

**Неповні квадратні рівняння** – це рівняння виду  $ax^2 + bx = 0$ ,  $ax^2 + c = 0$  та  $ax^2 = 0$ , де  $a \neq 0$ . *Наприклад*,  $3x^2 - 6x = 0$ ,  $4x^2 - 1 = 0$  та  $5x^2 = 0$  є неповними квадратними рівняннями.

**МАТХВИЛКА** Укажіть неповне квадратне рівняння.

Перевірити

А	Б	В	Г	Д
$x^2 + x - 2 = 0$	$x^2 + x = 0$	$\frac{5}{x^2 - 4} = 1$	$x^4 - 16 = 0$	$x^2 = 3x - 2$

**ПРИКЛАД 1.** Розв'яжіть рівняння  $4x^2 - 8x = 0$ .

Визначимо коефіцієнти заданого квадратного рівняння	$a = 4; b = -8; c = 0$
Винесемо спільний множник $4x$ за дужки.	$4x(x - 2) = 0$
Добуток дорівнює нулю, коли хоча б один із множників дорівнює нулю	$4x = 0$ або $x - 2 = 0$
Розв'яжемо кожне з отриманих лінійних рівнянь	$4x = 0$ або $x - 2 = 0$ $x = 0$ $x = 2$

**Відповідь:** 0; 2. ◀

**ПРИКЛАД 2.** Розв'яжіть рівняння  $5x^2 - 20 = 0$ .

Визначимо коефіцієнти заданого квадратного рівняння	$a = 5; b = 0; c = -20$
Розділимо обидві частини рівняння на 5	$x^2 - 4 = 0$
Перенесемо $-4$ на праву частину рівняння	$x^2 = 4$
Дістанемо алгебраїчний квадратний корінь з обох частин рівняння	$x = -2$ або $x = 2$

**Відповідь:**  $-2$ ; 2. ◀

**ПРИКЛАД 3.** Розв'яжіть рівняння  $2x^2 + 18 = 0$ .

Визначимо коефіцієнти заданого квадратного рівняння	$a = 2; b = 0; c = 18$
Розділимо обидві частини рівняння на 2	$x^2 + 9 = 0$
Перенесемо 9 на праву частину рівняння	$x^2 = -9$
Оскільки $x^2 \geq 0$ , то $x^2 \neq -9$	Дійсних коренів немає

**Відповідь:**  $x \notin \mathbf{R}$ . ◀

**МАТХВИЛІНКА** Установіть відповідність між рівнянням (1–4) та його дійсними коренями (А – Д).

**Перевірити**

Рівняння	Корені рівняння																															
1 $x^2 = 25x$	А -5; 0	<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>А</th> <th>Б</th> <th>В</th> <th>Г</th> <th>Д</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>2</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>3</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>4</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>		А	Б	В	Г	Д	1						2						3						4					
	А		Б	В	Г	Д																										
1																																
2																																
3																																
4																																
2 $x^2 = 25$	Б -5; 5																															
3 $5x^2 + 25x = 0$	В 0; 25																															
4 $5x^2 + 25 = 0$	Г 5																															
	Д коренів немає																															

Таким чином, неповні квадратні рівняння можна розв'язувати за певним алгоритмом.

$ax^2 + bx = 0$	$ax^2 + c = 0$	$ax^2 = 0$
$x(ax + b) = 0$ $x = 0$ або $ax + b = 0$ $ax = -b$ $x = -\frac{b}{a}$	$ax^2 = -c$ $x^2 = -\frac{c}{a}$	$x^2 = 0$ $x = 0$
	Якщо $-\frac{c}{a} > 0$ , то $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$	
	Якщо $-\frac{c}{a} = 0$ , то $x = 0$	
	Якщо $-\frac{c}{a} < 0$ , то дійсних коренів немає	

Для того щоб розв'язати повне квадратне рівняння, користуються спеціальною схемою.

$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ $D = b^2 - 4ac$ – дискримінант квадратного рівняння		
Якщо $D > 0$ , то рівняння має два корені $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$	Якщо $D = 0$ , то рівняння має один корінь $x = -\frac{b}{2a}$	Якщо $D < 0$ , то коренів немає

Отже, за знаком виразу  $D$  визначають кількість коренів квадратного рівняння.

**МАТХВИЛІНКА** Установіть відповідність між рівнянням (1–3) та кількістю його коренів (А – Д). Перевірити

Рівняння	Кількість коренів рівняння																									
1 $x^2 + 4x + 4 = 0$	А жодного	<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>А</th> <th>Б</th> <th>В</th> <th>Г</th> <th>Д</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <th>1</th> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <th>2</th> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <th>3</th> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>		А	Б	В	Г	Д	1						2						3					
	А		Б	В	Г	Д																				
1																										
2																										
3																										
2 $x^2 + 4x + 5 = 0$	Б один																									
3 $x^2 + 4x - 5 = 0$	В два																									
	Г три																									
	Д безліч																									

**ПРИКЛАД 4.** Розв'яжіть рівняння  $3x^2 + 4x - 4 = 0$ .

Визначимо коефіцієнти заданого квадратного рівняння	$a = 3; b = 4; c = -4$
Визначимо дискримінант квадратного рівняння	$D = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4) = 64$
Оскільки $D > 0$ , то рівняння буде мати два корені	$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 3} = \frac{-4 \pm 8}{6}$
Знайдемо корені рівняння	$x_1 = \frac{-4 + 8}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3};$ $x_2 = \frac{-4 - 8}{6} = \frac{-12}{6} = -2$

Відповідь:  $-2; \frac{2}{3}$ . ◀

**МАТХВИЛІНКА** Укажіть проміжок, якому належить більший корінь рівняння  $2x^2 - 3x - 5 = 0$ . Перевірити

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -2]$	$(-2; 0]$	$(0; 1]$	$(1; 2]$	$(2; +\infty)$

Для розв'язування квадратних рівнянь та окремих задач використовують *теорему Вієта*.

**Теорема Вієта:** якщо  $x_1$  і  $x_2$  – корені рівняння  $ax^2 + bx + c = 0$ , то

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

*Зверніть увагу!* Ця теорема має зміст, якщо дискримінант квадратного рівняння  $D \geq 0$ .

Якщо параметр  $a = 1$ , то отримаємо рівняння  $x^2 + bx + c = 0$ , яке називають **зведеним квадратним рівнянням**. У цьому випадку, якщо  $x_1$  і  $x_2$  – корені зведеного квадратного рівняння, то  $x_1 + x_2 = -b$  і  $x_1 \cdot x_2 = c$ .

**МАТХВИЛКА** Знайдіть значення виразу  $x_1 + x_2 - x_1x_2$ , якщо  $x_1$  і  $x_2$  – корені рівняння  $x^2 + 6x - 3 = 0$ .

Перевірити

А	Б	В	Г	Д
-3	2	9	3	-9

**Теорема, обернена до теореми Вієта:** якщо  $x_1$  і  $x_2$  такі, що  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$  і  $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ , то вони є коренями рівняння  $ax^2 + bx + c = 0$ .

Відповідно, якщо  $a = 1$ , то для  $x_1$  і  $x_2$  таких, що  $x_1 + x_2 = -b$  і  $x_1 \cdot x_2 = c$ , вони є коренями рівняння  $x^2 + bx + c = 0$ .

**ПРИКЛАД 5.** Використовуючи теорему, обернену до теореми Вієта, розв'яжіть рівняння  $x^2 + 3x - 10 = 0$ .

Визначимо коефіцієнти заданого квадратного рівняння	$a = 1; b = 3; c = -10$
Визначимо дискримінант квадратного рівняння	$D = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 49$
Оскільки $D > 0$ , то рівняння буде мати два корені. Запишемо теорему Вієта	$x_1 + x_2 = -b = -3;$ $x_1 \cdot x_2 = c = -10$
Підберемо корені рівняння. Спочатку розглядаємо можливі варіанти добутку $x_1 \cdot x_2 = -10$	Маємо: $1 \cdot (-10) = -10;$ $-1 \cdot 10 = -10;$ $2 \cdot (-5) = -10;$ $-2 \cdot 5 = -10.$ Оскільки $x_1 + x_2 = -3$ , то $x_1 = -5$ і $x_2 = 2$

Відповідь: -5; 2. ◀

**МАТХВИЛІНКА** Розв'яжіть рівняння  $x^2 - 5x - 66 = 0$ .

Перевірити

А	Б	В	Г	Д
-3; 22	-11; 6	-22; 3	-2; 33	-6; 11

### ПЕРЕВІРТЕ СВОЮ КОМПЕТЕНТНІСТЬ

1 Укажіть неповні квадратні рівняння:

Перевірити

$$x^2 = 49;$$

$$4x^2 - 16 = 0;$$

$$x^2 - 3x = 4;$$

$$3x^2 + 27x = 0;$$

$$x^2 = 9x;$$

$$2x^2 = x + 1.$$

2 Укажіть повні квадратні рівняння:

Перевірити

$$x^2 - 16 = 0;$$

$$4x^2 - 3x = 1;$$

$$x^2 + 4x = 0;$$

$$5 - 20x^2 = 0;$$

$$x^2 = 9x - 8;$$

$$9x^2 + 4 = 12x.$$

3 Серед наведених квадратних рівнянь укажіть зведені:

Перевірити

$$x^2 + 2x - 8 = 0;$$

$$4x^2 + 8x + 3 = 0;$$

$$5x^2 + 3x - 2 = 0;$$

$$x^2 - 3x - 18 = 0.$$

4 Запишіть коефіцієнти квадратного рівняння  $2x^2 - 3x + 1 = 0$ .

Відповідь:  $a =$                        $b =$                        $c =$

Перевірити

5 Запишіть коефіцієнти квадратного рівняння  $9x - 4x^2 - 2 = 0$ .

Відповідь:  $a =$                        $b =$                        $c =$

Перевірити

6 Розв'яжіть рівняння  $x^2 - 8x = 0$ .

Відповідь:  $x_1 =$                        $x_2 =$

Перевірити

7 Розв'яжіть рівняння  $4x^2 + x = 0$ .

Відповідь:  $x_1 =$                        $x_2 =$

Перевірити

8 Розв'яжіть рівняння  $x^2 - 25 = 0$ .

Відповідь:  $x_1 =$  ;  $x_2 =$

Перевірити

9 Розв'яжіть рівняння  $75 - 3x^2 = 0$ .

Відповідь:  $x_1 =$  ;  $x_2 =$

Перевірити

10 Розв'яжіть рівняння  $2x^2 - 10 = 0$ .

Відповідь:  $x_1 = -\sqrt{\quad}$  ;  $x_2 = \sqrt{\quad}$

Перевірити

10 Розв'яжіть рівняння  $\frac{3}{5}x^2 = 15x$ .

Відповідь:  $x_1 =$  ;  $x_2 =$

Перевірити

11 Розв'яжіть рівняння  $\frac{7}{8} - \frac{2}{7}x^2 = 0$ .

Відповідь:  $x_1 =$  ;  $x_2 =$

Перевірити

12 Знайдіть дискримінант квадратного рівняння  $x^2 + 3x - 5 = 0$ .

Відповідь:  $D =$

Перевірити

13 Знайдіть дискримінант квадратного рівняння  $x^2 - 6x + 9 = 0$ .

Відповідь:  $D =$

Перевірити

14 Знайдіть дискримінант квадратного рівняння  $-2x^2 - 5x + 2 = 0$ .

Відповідь:  $D =$

Перевірити

15 Визначте кількість дійсних коренів рівняння  $x^2 + 2x - 6 = 0$ .

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

**16** Визначте кількість дійсних коренів рівняння  $4x^2 + 4x + 1 = 0$ .

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

**17** Визначте кількість дійсних коренів рівняння  $-3x^2 + x - 2 = 0$ .

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

**18** Розв'яжіть рівняння  $x^2 - 6x + 5 = 0$ , користуючись формулою коренів квадратного рівняння.

Відповідь:  $x_1 =$  ;  $x_2 =$

Перевірити

**19** Розв'яжіть рівняння  $x^2 - x - 6 = 0$ , користуючись формулою коренів квадратного рівняння.

Відповідь:  $x_1 =$  ;  $x_2 =$

Перевірити

**20** Розв'яжіть рівняння  $x^2 + 5x - 14 = 0$ , користуючись формулою коренів квадратного рівняння.

Відповідь:  $x_1 =$  ;  $x_2 =$

Перевірити

**21** Розв'яжіть рівняння  $x^2 + 7x + 12 = 0$ , користуючись формулою коренів квадратного рівняння.

Відповідь:  $x_1 =$  ;  $x_2 =$

Перевірити

**22** Розв'яжіть рівняння  $x^2 - 16x + 64 = 0$ , користуючись формулою коренів квадратного рівняння.

Відповідь:  $x =$

Перевірити

**23** Розв'яжіть рівняння  $2x^2 - 3x + 1 = 0$ , користуючись формулою коренів квадратного рівняння.

Відповідь:  $x_1 =$  ;  $x_2 =$

Перевірити



- 24** Розв'яжіть рівняння  $-4x^2 + 4x + 3 = 0$ , користуючись формулою коренів квадратного рівняння.

Відповідь:  $x_1 =$  ;  $x_2 =$

Перевірити

- 24** Розв'яжіть рівняння  $-25x^2 + 20x - 4 = 0$ , користуючись формулою коренів квадратного рівняння.

Відповідь:  $x =$

Перевірити

- 25** Розв'яжіть рівняння  $3x^2 + 5x + 1 = 0$ , користуючись формулою коренів квадратного рівняння.

Відповідь:  $x_1 = \frac{-\sqrt{\quad}}{\quad}$ ;  $x_2 = \frac{+\sqrt{\quad}}{\quad}$

Перевірити

- 26** Відомо, що  $x_1$  і  $x_2$  – корені рівняння  $x^2 + 3x - 5 = 0$ . Тоді

1.  $x_1 + x_2 =$

2.  $x_1 \cdot x_2 =$

3.  $2x_1 + 2x_2 - 5x_1x_2 =$

Перевірити

- 27** Використовуючи теорему, обернену до теореми Вієта, розв'яжіть рівняння  $x^2 - 5x + 6 = 0$ .

Відповідь:  $x_1 =$  ;  $x_2 =$

Перевірити

- 28** Використовуючи теорему, обернену до теореми Вієта, розв'яжіть рівняння  $x^2 + 7x + 12 = 0$ .

Відповідь:  $x_1 =$  ;  $x_2 =$

Перевірити

- 29** Використовуючи теорему, обернену до теореми Вієта, розв'яжіть рівняння  $x^2 + 2x - 15 = 0$ .

Відповідь:  $x_1 =$  ;  $x_2 =$

Перевірити

- 30** Використовуючи теорему, обернену до теореми Вієта, розв'яжіть рівняння  $x^2 - 6x - 16 = 0$ .

Відповідь:  $x_1 =$  ;  $x_2 =$

Перевірити

**30** Розв'яжіть рівняння  $(2x - 5)(x + 5) = 0$ .

Відповідь:  $x_1 =$  ;  $x_2 =$

Перевірити

**31** Розв'яжіть рівняння  $(5x - 4)^2 = 0$ .

Відповідь:  $x =$

Перевірити

**32** Розв'яжіть рівняння  $(2x + 3)^2 = 25$ .

Відповідь:  $x_1 =$  ;  $x_2 =$

Перевірити

**33** Знайдіть *найменший* корінь рівняння  $(3x + 1)(x - 2) = 6$ .

Відповідь:

Перевірити

**34** Знайдіть *найбільший* корінь рівняння  $(3x + 2)^2 - (x + 3)^2 = 4$ .

Відповідь:

Перевірити

**35** Знайдіть *суму* коренів рівняння  $(x + 5)^2 + (x - 7)(x + 7) = 6(x - 3)$ .

Відповідь:

Перевірити

**36** Знайдіть *суму* коренів рівняння  $(2x - 3)(2x + 3) - x(x + 2) = 2x(x - 5)$ .

Відповідь:

Перевірити

**37** Знайдіть *найменший* корінь рівняння  $\frac{x^2 + 7}{8} - \frac{4x - 3}{3} = -1$ .

Відповідь:

Перевірити

**38** Знайдіть *найменший* корінь рівняння  $\frac{2x^2 + 1}{3} - \frac{x^2 + 2}{9} = \frac{5x - 1}{6}$ .

Відповідь:

Перевірити

**39** Відомо, що  $x_1$  і  $x_2$  – корені рівняння  $x^2 + 4x - 9 = 0$ . Тоді

1.  $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 =$

2.  $x_1^2 + x_2^2 =$

3.  $(x_1 - x_2)^2 =$

Перевірити

## САМОСТІЙНА РОБОТА №2

Завдання 1–5 мають по п'ять варіантів відповіді, з яких лише ОДИН ПРАВИЛЬНИЙ. Виберіть правильний варіант відповіді й позначте його.

1 Укажіть квадратне рівняння.

А	Б	В	Г	Д
$4x - 3 = 9$	$\sqrt{x + 3} = 4$	$x^2 = x + 6$	$3x = x^3$	$\frac{4}{x^2 - 3x} = 1$

2 Розв'яжіть рівняння  $9x^2 = 1$ .

А	Б	В	Г	Д
3	$-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}$	4,5	-3; 3	$\frac{1}{3}$

3 Розв'яжіть рівняння  $4x^2 = x$ .

А	Б	В	Г	Д
0	-0,25; 0	0,25	4	0; 0,25

4 Знайдіть дискримінант квадратного рівняння  $2x^2 + 3x - 5 = 0$ .

А	Б	В	Г	Д
-31	46	19	49	-34

5 Укажіть проміжок, якому належить *найменший* із коренів рівняння  $x(x + 5) = 3x + 8$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -5)$	$[-5; -2)$	$[-2; 0)$	$[0; 5)$	$[5; +\infty)$

У завданні 6 до кожного з трьох рядків інформації, позначених цифрами, доберіть один правильний, на Вашу думку, варіант, позначений буквою.

- 6** Установіть відповідність між рівнянням (1–3) та твердженням про його корені (А – Д).

*Рівняння*

- 1  $x^2 - 5x - 2 = 0$   
 2  $x^2 + 5x + 2 = 0$   
 3  $x^2 + 2x + 5 = 0$

*Твердження про корені*

- А Сума коренів рівняння дорівнює 5.  
 Б Добуток коренів рівняння дорівнює  $-5$ .  
 В Сума коренів рівняння дорівнює  $-2$ .  
 Г Рівняння не має дійсних коренів.  
 Д Добуток коренів рівняння дорівнює 2.

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					

Розв'яжіть завдання 7–8. Одержані числові відповіді запишіть у спеціально відведеному місці. Відповідь записуйте лише десятковим дробом, урахувавши положення коми. Знак «мінус» записуйте перед першою цифрою числа.

- 7** Розв'яжіть рівняння  $\frac{3x^2 - 5}{2} - \frac{2x + 5}{3} = \frac{x^2 - 1}{6}$ .

Якщо рівняння має один корінь, запишіть його у відповідь. Якщо рівняння має кілька коренів, то у відповідь запишіть їх *добуток*.

*Відповідь:*

- 8** Відомо, що  $x_1$  і  $x_2$  – корені рівняння  $x^2 - 6x + 3 = 0$ . Знайдіть значення виразу  $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$ .

*Відповідь:*

ЗАВЕРШИТИ

СКАСУВАТИ

### 3 Раціональні рівняння

**Рівносильні рівняння** – це два рівняння, які мають одні й ті самі корені або кожне з них не має коренів.

*Наприклад*, рівняння  $x^2 = 4$  і  $(x - 2)(x + 2) = 0$  є рівносильними, оскільки кожне з них має два корені:  $x_1 = -2$  і  $x_2 = 2$ . Також рівносильними є рівняння  $0x = 4$  і  $x^2 + 1 = 0$ , оскільки кожне з них не має коренів.

**МАТХВИЛКА** Серед наведених рівнянь укажіть рівняння, яке є рівносильним рівнянню  $-8x = 4$ .

Перевірити

А	Б	В	Г	Д
$4x^2 = 1$	$2x + 5 = 1$	$\frac{x}{3} - \frac{x}{2} = \frac{1}{12}$	$2x^2 + x = 0$	$\frac{x}{6} = \frac{1}{3}$

#### ПРИГАДАЙТЕ

**Раціональний вираз** – вираз, складений з чисел і змінних за допомогою дій додавання, віднімання, множення, ділення або піднесення до степеня.

**Наприклад**, вираз  $\frac{x+2}{x-2}$  є раціональним.

Нехай  $P(x)$  і  $Q(x)$  – раціональні вирази, залежні від змінної  $x$ . Якщо необхідно визначити, за яких значень змінної  $x$  ці вирази набувають рівних значень, то кажуть, що слід розв'язати рівняння  $P(x) = Q(x)$ .

**Раціональне рівняння** – це рівняння, ліва і права частина якого є раціональними виразами.

Розглянемо рівняння виду  $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ . Пригадаємо, що *дріб дорівнює нулю, коли його чисельник дорівнює нулю, а знаменник не дорівнює нулю*:

$$\text{якщо } \frac{P(x)}{Q(x)} = 0, \text{ то } P(x) = 0 \text{ і } Q(x) \neq 0$$

Під час розв'язування дробово раціональних рівнянь отримані значення змінної слід перевірити одним із двох способів:

- 1 знайти ОДЗ (область допустимих значень) рівняння та визначити, чи входять в ОДЗ отримані значення;
- 2 здійснити безпосередню підстановку отриманих значень в ОДЗ рівняння.

**ПРИКЛАД 1.** Розв'яжіть рівняння  $\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9} = 0$ .

**Спосіб 1** (зведення до рівносильної системи)

Дріб дорівнює нулю, коли його чисельник дорівнює нулю, а знаменник не дорівнює нулю	$x^2 - 2x - 3 = 0$	ОДЗ: $x^2 - 9 \neq 0$
Розв'яжемо рівняння $x^2 - 2x - 3 = 0$ , використовуючи теорему, обернену до теореми Вієта	$x^2 - 2x - 3 = 0, D > 0$ $x_1 + x_2 = 2;$ $x_1 \cdot x_2 = -3;$ $x_1 = -1; x_2 = 3$	
Визначимо, за яких $x$ знаменник початкового дроби не дорівнює нулю, тобто знайдемо ОДЗ рівняння	$x^2 - 9 \neq 0;$ $x^2 \neq 9;$ $x_1 \neq -3; x_2 \neq 3$	
Проаналізуємо, які з отриманих значень $x$ задовольняють ОДЗ	Оскільки $x \neq -3$ і $x \neq 3$ , то корінь $x_2 = 3$ не задовольняє задане рівняння, тоді $x_1 = -1$ – корінь рівняння	

**Спосіб 2** (здійснення безпосередньої перевірки)

Дріб дорівнює нулю, коли його чисельник дорівнює нулю, а знаменник не дорівнює нулю	$x^2 - 2x - 3 = 0$	ОДЗ: $x^2 - 9 \neq 0$
Розв'яжемо рівняння $x^2 - 2x - 3 = 0$ , використовуючи теорему, обернену до теореми Вієта	$x^2 - 2x - 3 = 0, D > 0$ $x_1 + x_2 = 2;$ $x_1 \cdot x_2 = -3;$ $x_1 = -1; x_2 = 3$	
Виконаємо перевірку отриманих значень, підставивши їх безпосередньо в ОДЗ рівняння	Якщо $x = -1$ , то $(-1)^2 - 9 = -8 \neq 0$ – корінь задовольняє ОДЗ.	
Виключимо ті корені рівняння, при яких знаменник лівої частини початкового рівняння дорівнює нулю	Якщо $x = 3$ , то $3^2 - 9 = 0$ – корінь не задовольняє ОДЗ. Отже, $x = -1$ – корінь рівняння	

**Відповідь:** 1. ◀

**МАТХВИЛКА** Розв'яжіть рівняння  $\frac{x^2 + 4x}{2x + 8} = 0$ .

Перевірити

<b>А</b>	<b>Б</b>	<b>В</b>	<b>Г</b>	<b>Д</b>
-4	-4; 0	0; 4	0	коренів нема

Розглянемо рівняння виду  $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{H(x)}{R(x)}$ . Пригадаємо основну властивість пропорції: *добуток крайніх членів пропорції дорівнює добутку її середніх членів*, тому

якщо  $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{H(x)}{R(x)}$ , то  $P(x) \cdot R(x) = Q(x) \cdot H(x)$  і  $Q(x) \neq 0, R(x) \neq 0$

**ПРИКЛАД 2.** Розв'яжіть рівняння  $\frac{2x-1}{x+2} = \frac{x-2}{x-4}$ .

Запишемо ОДЗ рівняння, урахувавши обидва раціональні вирази	ОДЗ: $x+2 \neq 0$ і $x-4 \neq 0$ ; $x \neq -2$ $x \neq 4$
Скористаємося основною властивістю пропорції та розв'яжемо отримане рівняння	$(2x-1)(x-4) = (x+2)(x-2)$ ; $2x^2 - 8x - x + 4 = x^2 - 4$ ; $x^2 - 9x + 8 = 0$ ; $x_1 = 1; x_2 = 8$
Ураховуючи ОДЗ рівняння, зробимо висновок.	$x_1 = 1$ і $x_2 = 8$ задовольняють ОДЗ, тому є коренями рівняння

**Відповідь:** 1; 8. ◀

**МАТХВИЛКА** Розв'яжіть рівняння  $\frac{x-2}{x+3} = \frac{1}{2}$  й укажіть проміжок, якому належить його корінь.

Перевірити

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 0]$	$(0; 4]$	$(4; 8]$	$(8; 12]$	$(12; +\infty)$

**ПРИКЛАД 3.** Розв'яжіть рівняння  $\frac{1}{x-4} + 3x = 12 + \frac{1}{x-4}$ .

Запишемо ОДЗ рівняння	ОДЗ: $x \neq 4$
Віднімемо від обох частин рівняння дріб $\frac{1}{x-4}$ , визначений на ОДЗ. Розв'яжемо отримане рівняння	$3x = 12$ ; $x = 4$
Ураховуючи ОДЗ, корінь не задовольняє рівняння, тому воно не має коренів	Оскільки $x \neq 4$ , то $x \in \emptyset$

**Відповідь:**  $x \in \emptyset$ . ◀

**МАТХВИЛИНКА** Розв'яжіть рівняння  $x^2 - \frac{4}{x-3} = 9 - \frac{4}{x-3}$ .

Перевірити

А	Б	В	Г	Д
коренів нема	3	9	-3	-3; 3

**ПРИКЛАД 4.** Розв'яжіть рівняння  $\frac{x+1}{x^2-16} + \frac{x+2}{x^2-4x} = \frac{x-2}{x^2+4x}$ .

Перенесемо дріб $\frac{x-2}{x^2+4x}$ на ліву частину рівняння	$\frac{x+1}{x^2-16} + \frac{x+2}{x^2-4x} - \frac{x-2}{x^2+4x} = 0$	
Розкладемо знаменники дробів на множники	$\frac{x+1}{(x-4)(x+4)} + \frac{x+2}{x(x-4)} - \frac{x-2}{x(x+4)} = 0$	
Зведемо дроби до спільного знаменника	$\frac{x(x+1) + (x+4)(x+2) - (x-4)(x-2)}{x(x-4)(x+4)} = 0$	
Спростимо чисельник отриманого дробу	$\frac{x^2 + x + x^2 + 2x + 4x + 8 - (x^2 - 2x - 4x + 8)}{x(x-4)(x+4)} = 0$	
	$\frac{x^2 + 13x}{x(x-4)(x+4)} = 0$	
Дріб дорівнює нулю, коли його чисельник дорівнює нулю, а знаменник не дорівнює нулю	$x^2 + 13x = 0$	ОДЗ: $x(x-4)(x+4) \neq 0$
Розв'яжемо рівняння $x^2 + 13x = 0$	$\begin{aligned} x^2 + 13x &= 0; \\ x(x+13) &= 0; \\ x = 0 \text{ або } x + 13 &= 0; \\ x &= -13 \end{aligned}$	
Виконаємо перевірку отриманих значень, підставивши їх безпосередньо в ОДЗ рівняння	Якщо $x = 0$ , то $0 \cdot (0-4)(0+4) = 0$ – корінь не задовольняє ОДЗ.	
Виключимо ті корені рівняння, при яких знаменник лівої частини початкового рівняння дорівнює нулю	Якщо $x = -13$ , то $-13 \cdot (-13-4)(-13+4) \neq 0$ – корінь задовольняє ОДЗ. Отже, $x = -13$ – єдиний корінь рівняння	

Відповідь: -13. ◀



**МАТХВИЛІНКА** Розв'яжіть рівняння  $\frac{4}{x-1} - \frac{4}{x+1} = 1$ .

Перевірити

А	Б	В	Г	Д
-3; 3	$\sqrt{3}$	3	$-\sqrt{3}; \sqrt{3}$	коренів нема

### ПЕРЕВІРТЕ СВОЮ КОМПЕТЕНТНІСТЬ

1 Укажіть пари рівносильних рівнянь:

Перевірити

$$3x = 6 \text{ і } 4x = 2;$$

$$12 - 3x = 0 \text{ і } x^2 = 4x;$$

$$x - 2 = 4 \text{ і } x + 2 = 8;$$

$$\frac{x}{2} = 8 \text{ і } \frac{8}{x} = 2;$$

$$x^2 - 64 = 0 \text{ і } (x - 8)(x + 8) = 0;$$

$$x - 2 = x - 2 \text{ і } \frac{x-2}{x-2} = 1.$$

2 Знайдіть корінь рівняння  $\frac{x+4}{x-3} = 0$ .

Відповідь:

Перевірити

3 Розв'яжіть рівняння  $\frac{x^2-9}{x-3} = 0$ .

Якщо рівняння має один корінь, запишіть його у відповідь. Якщо рівняння має кілька коренів, то у відповідь запишіть їх *добуток*. Якщо рівняння не має коренів, то у відповідь запишіть число 100.

Відповідь:

Перевірити

4 Розв'яжіть рівняння  $\frac{x+5}{x^2-25} = 0$ .

Якщо рівняння має один корінь, запишіть його у відповідь. Якщо рівняння має кілька коренів, то у відповідь запишіть їх *добуток*. Якщо рівняння не має коренів, то у відповідь запишіть число 100.

Відповідь:

Перевірити

5 Розв'яжіть рівняння  $\frac{x-1}{x-1} = 0$ .

Якщо рівняння має один корінь, запишіть його у відповідь. Якщо рівняння має більше одного кореня, то у відповідь запишіть число 50. Якщо рівняння не має коренів, то у відповідь запишіть число 100.

Відповідь:

Перевірити

6 Розв'яжіть рівняння  $\frac{2x+3}{2x+3} = 1$ .

Якщо рівняння має один корінь, запишіть його у відповідь. Якщо рівняння має більше одного кореня, то у відповідь запишіть число 50. Якщо рівняння не має коренів, то у відповідь запишіть число 100.

Відповідь:

Перевірити

7 Знайдіть корінь рівняння  $\frac{6}{x} = \frac{3}{8}$ .

Відповідь:

Перевірити

8 Знайдіть корінь рівняння  $\frac{1}{x-9} = \frac{1}{2}$ .

Відповідь:

Перевірити

9 Знайдіть *найменший* корінь рівняння  $\frac{4}{x} = \frac{x}{9}$ .

Відповідь:

Перевірити

10 Розв'яжіть рівняння  $\frac{2}{x+6} + 2x = \frac{2}{x+6} - 12$ .

Якщо рівняння має один корінь, запишіть його у відповідь. Якщо рівняння має кілька коренів, то у відповідь запишіть їхню *суму*. Якщо рівняння не має коренів, то у відповідь запишіть число 100.

Відповідь:

Перевірити

11 Розв'яжіть рівняння  $x^2 + \frac{4}{x-1} = 1 + \frac{4}{x-1}$ .

Якщо рівняння має один корінь, запишіть його у відповідь. Якщо рівняння має кілька коренів, то у відповідь запишіть їх *добуток*. Якщо рівняння не має коренів, то у відповідь запишіть число 100.

Відповідь:

Перевірити

12 Розв'яжіть рівняння  $\frac{x^2-49}{x^2+7x} = 0$ .

Якщо рівняння має один корінь, запишіть його у відповідь. Якщо рівняння має кілька коренів, то у відповідь запишіть їх *добуток*. Якщо рівняння не має коренів, то у відповідь запишіть число 100.

Відповідь:

Перевірити

**13** Розв'яжіть рівняння  $\frac{x+1}{x-5} = 3$ .

Якщо рівняння має один корінь, запишіть його у відповідь. Якщо рівняння має кілька коренів, то у відповідь запишіть їхню *суму*. Якщо рівняння не має коренів, то у відповідь запишіть число 100.

Відповідь:

Перевірити

**14** Розв'яжіть рівняння  $\frac{x+2}{x} = x$ .

Якщо рівняння має один корінь, запишіть його у відповідь. Якщо рівняння має кілька коренів, то у відповідь запишіть їхню *суму*. Якщо рівняння не має коренів, то у відповідь запишіть число 100.

Відповідь:

Перевірити

**15** Розв'яжіть рівняння  $\frac{x^2-4}{x+10} = 2$ .

Якщо рівняння має один корінь, запишіть його у відповідь. Якщо рівняння має кілька коренів, то у відповідь запишіть *найбільший* з них. Якщо рівняння не має коренів, то у відповідь запишіть число 100.

Відповідь:

Перевірити

**16** Розв'яжіть рівняння  $\frac{x+2}{2x-1} = \frac{3}{x}$ .

Якщо рівняння має один корінь, запишіть його у відповідь. Якщо рівняння має кілька коренів, то у відповідь запишіть їхню *суму*. Якщо рівняння не має коренів, то у відповідь запишіть число 100.

Відповідь:

Перевірити

**17** Розв'яжіть рівняння  $\frac{x+1}{x-5} = \frac{x+5}{x+1}$ .

Якщо рівняння має один корінь, запишіть його у відповідь. Якщо рівняння має кілька коренів, то у відповідь запишіть їхню *суму*. Якщо рівняння не має коренів, то у відповідь запишіть число 100.

Відповідь:

Перевірити

**18** Знайдіть *найбільший* корінь рівняння  $\frac{5}{x+3} + \frac{5}{x-3} = 4$ .

Відповідь:

Перевірити

19 Знайдіть *найменший* корінь рівняння  $\frac{7}{x^2 - 16} - \frac{x}{x + 4} = 2$ .

Відповідь:

Перевірити

20 Розв'яжіть рівняння  $\frac{2}{2x - 3} + \frac{1}{2x + 3} = \frac{2x + 9}{4x^2 - 9}$ .

Якщо рівняння має один корінь, запишіть його у відповідь. Якщо рівняння має кілька коренів, то у відповідь запишіть їх *добуток*. Якщо рівняння не має коренів, то у відповідь запишіть число 100.

Відповідь:

Перевірити

21 Розв'яжіть рівняння  $\frac{3x + 1}{3x - 1} - \frac{3x - 1}{3x + 1} = \frac{6}{1 - 9x^2}$ .

Якщо рівняння має один корінь, запишіть його у відповідь. Якщо рівняння має кілька коренів, то у відповідь запишіть їх *добуток*. Якщо рівняння не має коренів, то у відповідь запишіть число 100.

Відповідь:

Перевірити

22 Розв'яжіть рівняння  $\frac{1}{x + 1} - \frac{1}{x - 6} = \frac{7}{12}$ .

Якщо рівняння має один корінь, запишіть його у відповідь. Якщо рівняння має кілька коренів, то у відповідь запишіть їх *добуток*. Якщо рівняння не має коренів, то у відповідь запишіть число 100.

Відповідь:

Перевірити

23 Розв'яжіть рівняння  $\frac{4}{x} + \frac{1}{x - 2} = \frac{3}{x + 3}$ .

Якщо рівняння має один корінь, запишіть його у відповідь. Якщо рівняння має кілька коренів, то у відповідь запишіть *найменший* з них. Якщо рівняння не має коренів, то у відповідь запишіть число 100.

Відповідь:

Перевірити

24 Розв'яжіть рівняння  $\frac{5}{x + 5} - \frac{x - 6}{x^2 + 5x} = \frac{x - 1}{x^2 - 25}$ .

Якщо рівняння має один корінь, запишіть його у відповідь. Якщо рівняння має кілька коренів, то у відповідь запишіть *найбільший* з них. Якщо рівняння не має коренів, то у відповідь запишіть число 100.

Відповідь:

Перевірити

## САМОСТІЙНА РОБОТА №3

Завдання 1–5 мають по п'ять варіантів відповіді, з яких лише ОДИН ПРАВИЛЬНИЙ. Виберіть правильний варіант відповіді й позначте його.

1 Розв'яжіть рівняння  $\frac{5x}{x-4} = 0$ .

А	Б	В	Г	Д
4	5	0; 4	0	-4

2 Укажіть проміжок, якому належить корінь рівняння  $\frac{3}{x-5} = 1$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -2]$	$(-2; 0]$	$[0; 2)$	$[0; 8)$	$[8; +\infty)$

3 Укажіть усі значення змінної, за яких рівняння  $\frac{x+8}{x^2-3x-4} = 1$  не має змісту.

А	Б	В	Г	Д
-1; 4	-8; -4; 1	-4; 1	-2; 6	-8; -1; 4

4 Розв'яжіть рівняння  $\frac{2x+1}{x-5} = \frac{x+6}{x-5}$ .

А	Б	В	Г	Д
5	7	3,5	2,5	коренів нема

5 Розв'яжіть рівняння  $x^2 - \frac{1}{x-3} = 3x - \frac{1}{x-3}$ .

А	Б	В	Г	Д
коренів нема	3	-3; 0	0	0; 3

У завданні 6 до кожного з трьох рядків інформації, позначених цифрами, доберіть один правильний, на Вашу думку, варіант, позначений буквою.

- 6** Установіть відповідність між рівнянням (1–3) та твердженням про його корені (А – Д).

<i>Рівняння</i>	<i>Твердження про корені</i>	
1 $\frac{x^2 - 4}{x - 2} = 0$	А Немає коренів.	
2 $\frac{x + 2}{x^2 - 4} = 0$	Б Має корені $x_1 = -2$ ; $x_2 = 2$ .	1
3 $\frac{x + 2}{x + 2} = 1$	В $x$ – будь-яке число, крім $-2$ .	2
	Г Має корінь $x = -2$ .	3
	Д Має корінь $x = 2$ .	

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					

Розв'яжіть завдання 7–8. Одержані числові відповіді запишіть у спеціально відведеному місці. Відповідь записуйте лише десятковим дробом, урахувавши положення коми. Знак «мінус» записуйте перед першою цифрою числа.

- 7** Розв'яжіть рівняння  $\frac{2x^2 + x - 1}{x + 1} = 3x - 1$ .

Якщо рівняння має один корінь, запишіть його у відповідь. Якщо рівняння має кілька коренів, то у відповідь запишіть їхню суму. Якщо рівняння не має коренів, то у відповідь запишіть число 100.

*Відповідь:*

- 8** Розв'яжіть рівняння  $\frac{x + 3}{x - 6} - \frac{2}{x} = \frac{14}{x^2 - 6x}$ .

Якщо рівняння має один корінь, запишіть його у відповідь. Якщо рівняння має кілька коренів, то у відповідь запишіть їх добуток. Якщо рівняння не має коренів, то у відповідь запишіть число 100.

*Відповідь:*

ЗАВЕРШИТИ

СКАСУВАТИ

## 4 Рівняння, що розв'язуються методом заміни змінної

Не всі рівняння зручно розв'язувати шляхом алгебраїчних перетворень. *Наприклад*, у рівнянні  $(x^2 + 4x)(x^2 + 4x + 1) = 30$  при розкритті дужок призведе до рівняння  $x^4 + 8x^3 + 17x^2 + 4x - 30 = 0$ , яке важко розв'язується стандартними шкільними методами. Розглянемо приклади рівнянь, що розв'язуються **методом введення нової змінної**.

**Біквадратні рівняння** – це рівняння виду  $ax^4 + bx^2 + c = 0$ , де  $a, b, c$  – деякі числа, причому  $a \neq 0$ .

У ході його розв'язання роблять заміну  $x^2 = t$ . Тоді  $x^4 = (x^2)^2 = t^2$ , і початкове рівняння набуває вигляду:

$$at^2 + bt + c = 0$$

**МАТХВИЛКА** Укажіть біквадратне рівняння.

Перевірити

А	Б	В	Г	Д
$x^4 + 3x^2 - 4 = 0$	$x^4 + x = 0$	$x^6 - x^3 - 6 = 0$	$x^2 = 49$	$x^2 - 5x + 6 = 0$

**ПРИКЛАД 1.** Розв'яжіть рівняння  $x^4 - 15x^2 - 16 = 0$ .

Уведемо заміну $x^2 = t$ і отримаємо квадратне рівняння зі змінною $t$	$t^2 - 15t - 16 = 0$		
Розв'яжемо отримане рівняння	$t_1 = -1; t_2 = 16$		
Виконаємо обернену заміну та розв'яжемо отримані неповні квадратні рівняння	<table style="width: 100%; border: none;"> <tr> <td style="width: 50%; text-align: center; padding: 5px;"><math>x^2 = -1;</math> <math>x \in \emptyset</math></td> <td style="width: 50%; text-align: center; padding: 5px;"><math>x^2 = 16;</math> <math>x = \pm 4</math></td> </tr> </table>	$x^2 = -1;$ $x \in \emptyset$	$x^2 = 16;$ $x = \pm 4$
$x^2 = -1;$ $x \in \emptyset$	$x^2 = 16;$ $x = \pm 4$		

**Відповідь:** -4; 4. ◀

**МАТХВИЛКА** Розв'яжіть рівняння  $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$ .

Перевірити

А	Б	В	Г	Д
-9; 4	-3; 3	-3; -2; 2; 3	2	-2; 2

Не лише біквадратні, а й деякі інші види рівнянь можна розв'язувати за допомогою заміни змінної. Для того щоб розв'язувати такі рівняння, потрібно вміти бачити *повторення виразів*.

*Зверніть увагу!* Якщо після введення заміни не всі змінні замінилися на нові, то слід переглянути цей варіант та знайти інші шляхи розв'язання.

**ПРИКЛАД 2.** Розв'яжіть рівняння  $(x^2 + x - 5)^2 + 2(x^2 + x - 5) - 3 = 0$ .

Уведемо заміну $x^2 + x - 5 = t$ і отримаємо квадратне рівняння зі змінною $t$	$t^2 + 2t - 3 = 0$	
Розв'яжемо отримане рівняння	$t_1 = -3; t_2 = 1$	
Виконаємо обернену заміну та розв'яжемо отримані квадратні рівняння	$x^2 + x - 5 = -3;$ $x^2 + x - 2 = 0;$ $x_1 = -2; x_2 = 1$	$x^2 + x - 5 = 1;$ $x^2 + x - 6 = 0;$ $x_3 = -3; x_4 = 2$

*Відповідь:*  $-3; -2; 1; 2$ . ◀

**МАТХВИЛІНКА** Укажіть найраціональніший варіант введення нової змінної при розв'язуванні рівняння  $(x - 5)^4 - 3(x - 5)^2 - 4 = 0$ . Перевірити

А	Б	В	Г	Д
$x^2 = t$	$(x - 5)^2 = t$	$x - 5 = t$	$(x - 5)^4 = t$	$3(x - 5)^2 = t$

**ПРИКЛАД 3.** Розв'яжіть рівняння  $\frac{2x-1}{x+3} + \frac{x+3}{2x-1} = 2$ .

Знайдемо область допустимих значень рівняння	ОДЗ: $x \neq -3; x \neq 0,5$
Вирази $\frac{2x-1}{x+3}$ і $\frac{x+3}{2x-1}$ є взаємно оберненими, тому при введенні заміни $\frac{2x-1}{x+3} = t$ маємо $\frac{x+3}{2x-1} = \frac{1}{t}$	$t + \frac{1}{t} = 2$
Розв'яжемо отримане рівняння	$t + \frac{1}{t} = 2;$ $t + \frac{1}{t} - 2 = 0;$ $\frac{t^2 + 1 - 2t}{t} = 0;$ $t^2 - 2t + 1 = 0, \text{ ОДЗ: } t \neq 0;$ $(t - 1)^2 = 0;$ $t - 1 = 0;$ $t = 1 - \text{задовольняє ОДЗ}$



Виконаємо обернену заміну та розв'яжемо отримане рівняння	$\frac{2x-1}{x+3} = 1;$ $2x-1 = x+3;$ $x = 4 - \text{задовольняє ОДЗ}$
---	--

Відповідь: 4. ◀

**МАТХВИЛКА** Якого вигляду набуде рівняння  $x - 2 - \frac{4}{x-2} = 3$  при введенні заміни  $x - 2 = t$ ? Перевірити

А	Б	В	Г	Д
$t - 2 - \frac{4}{t} = 3$	$t^2 - 4t = 3$	$t - 4t = 3$	$t - \frac{4}{t} = 3$	$\frac{1}{t} - 4t = 3$

### ПЕРЕВІРТЕ СВОЮ КОМПЕТЕНТНІСТЬ

**1** Серед наведених рівнянь укажіть біквдратні рівняння: Перевірити

$$x^3 + 2x^2 - 8 = 0;$$

$$x^4 - 3x + 2 = 0;$$

$$2x^4 - x^2 - 1 = 0;$$

$$\frac{1}{x^4} + \frac{4}{x^2} - 5 = 0.$$

**2** Знайдіть *найменший* корінь рівняння  $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ .

Відповідь:

Перевірити

**3** Знайдіть *добуток* дійсних коренів рівняння  $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ .

Відповідь:

Перевірити

**4** Знайдіть *добуток* дійсних коренів рівняння  $x^4 - x^2 - 20 = 0$ .

Відповідь:

Перевірити

**5** Знайдіть *найбільший* корінь рівняння  $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$ .

Відповідь:

Перевірити

6 Знайдіть *найменший* корінь рівняння  $-16x^4 - 7x^2 + 9 = 0$ .

Відповідь:

Перевірити

7 Знайдіть *суму* всіх коренів рівняння  $(x + 3)^2 + 2(x + 3) - 3 = 0$ .

Відповідь:

Перевірити

8 Знайдіть *добуток* усіх коренів рівняння  $(x^2 - 7)^2 + (x^2 - 7) - 6 = 0$ .

Відповідь:

Перевірити

9 Знайдіть *суму* всіх коренів рівняння  $(x + 3)^4 - 5(x + 3)^2 + 4 = 0$ .

Відповідь:

Перевірити

10 Знайдіть *добуток* усіх коренів рівняння  $(x^2 + 5x)^2 - 2(x^2 + 5x) - 24 = 0$ .

Відповідь:

Перевірити

11 Знайдіть *найбільший* корінь рівняння  $(x^2 - 2x - 2)^2 + 2(x^2 - 2x - 2) = 3$ .

Відповідь:

Перевірити

12 Знайдіть *суму* всіх коренів рівняння  $(x^2 - 3x + 4)(x^2 - 3x + 5) = 6$ .

Відповідь:

Перевірити

13 Знайдіть *найменший* корінь рівняння  $(x^2 + 2x - 3)(x^2 + 2x - 5) = 15$ .

Відповідь:

Перевірити

14 Знайдіть *суму* всіх коренів рівняння  $3(x^2 + 5x + 2) + 2x^2 + 10x = -14$ .

Відповідь:

Перевірити

15 Знайдіть *добуток* усіх коренів рівняння  $(x^4 - 3x^2)^2 + 4(x^4 - 3x^2) = 32$ .

Відповідь:

Перевірити

**16** Знайдіть *найменший* корінь рівняння  $(x^4 - 5x^2)(x^4 - 5x^2 - 32) = 144$ .

Відповідь:

Перевірити

**17** Знайдіть *суму* всіх коренів рівняння  $\frac{x-3}{x+2} + \frac{x+2}{x-3} = \frac{17}{4}$ .

Відповідь:

Перевірити

**18** Знайдіть *добуток* усіх коренів рівняння  $\frac{x-1}{x} + \frac{3x}{2(x-1)} = -\frac{5}{2}$ .

Відповідь:

Перевірити

**19** Знайдіть *найменший* корінь рівняння  $\frac{x^2}{(2x+7)^2} + \frac{5x}{2x+7} - 6 = 0$ .

Відповідь:

Перевірити

**20** Знайдіть *суму* всіх коренів рівняння  $\frac{x^2 - x + 2}{x} - \frac{2x}{x^2 - x + 2} = 1$ .

Відповідь:

Перевірити

**21** Знайдіть *найбільший* корінь рівняння  $x^2 - 4x - 1 + \frac{5}{x^2 - 4x + 5} = 0$ .

Відповідь:

Перевірити

**22** Знайдіть *найменший* корінь рівняння  $\left(x^2 + \frac{9}{x^2}\right) - \left(x + \frac{3}{x}\right) = 14$ .

Відповідь:

Перевірити

**23** Розв'яжіть рівняння  $(x^2 - 2x + 2)^2 + 3x(x^2 - 2x + 2) = 10x^2$ .

Якщо рівняння має один корінь, запишіть його у відповідь. Якщо рівняння має кілька коренів, то у відповідь запишіть *найменший* з них. Якщо рівняння не має коренів, то у відповідь запишіть число 100.

Відповідь:

Перевірити

## САМОСТІЙНА РОБОТА №4

Завдання 1–5 мають по п'ять варіантів відповіді, з яких лише ОДИН ПРАВИЛЬНИЙ. Виберіть правильний варіант відповіді й позначте його.

1 Укажіть біквдратне рівняння.

А	Б	В	Г	Д
$x^4 - x = 0$	$x^6 + 7x^3 - 8 = 0$	$x^2 - x - 2 = 0$	$x^4 + x^2 - 6 = 0$	$\frac{2}{x^2} - \frac{4}{x} - 6 = 0$

2 Укажіть рівняння, яке отримується внаслідок уведення заміни  $x^2 = t$  у рівнянні  $4x^4 - 5x^2 - 9 = 0$ .

А	Б	В
$4t^2 - 5t - 9 = 0$	$t^2 - 5t - 9 = 0$	$4t^8 - 5t^4 - 9 = 0$
Г	Д	
$t - 5t^2 - 9 = 0$	$4t^4 - 5t - 9 = 0$	

3 Укажіть рівняння, яке є вихідним до рівняння  $t(t - 2) = 0$ , якщо  $t = x^2 + 2x$ .

А	Б	В
$x^2 + 2x(x^2 + 2x - 2) = 0$	$(x^2 + 2x)^2 - 2 = 0$	$(x^2 + 2x)(x^2 - 2x - 2) = 0$
Г	Д	
$x^2 + 2x - 2 = 0$	$(x^2 + 2x)(x^2 + 2x - 2) = 0$	

4 Укажіть усі корені рівняння  $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$ .

А	Б	В	Г	Д
-3; 3	-3; -2; 2; 3	-2; 2	2; 3	коренів нема

5 Укажіть проміжок, якому належить *найменший* корінь рівняння  $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -1)$	$[-1; -0,5)$	$[-0,5; -0)$	$[0; 0,5)$	$[0,5; +\infty)$

У завданні 6 до кожного з трьох рядків інформації, позначених цифрами, доберіть один правильний, на Вашу думку, варіант, позначений буквою.

**6** Установіть відповідність між рівнянням (1–3) та його коренями (А–Д).

Рівняння	Корені рівняння
1 $x^4 - 16 = 0$	А -2; 0; 2
2 $x^4 - 4x^2 = 0$	Б 0; 2.
3 $x^4 + 3x^2 + 4 = 0$	В -2; -1; 1; 2
	Г -2; 2
	Д коренів немає

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					

Розв'яжіть завдання 7–8. Одержані числові відповіді запишіть у спеціально відведеному місці. Відповідь записуйте лише десятковим дробом, урахувавши положення коми. Знак «мінус» записуйте перед першою цифрою числа.

**7** Розв'яжіть рівняння  $(x - 2)^4 - 8(x - 2)^2 - 9 = 0$ .

Якщо рівняння має один корінь, запишіть його у відповідь. Якщо рівняння має кілька коренів, то у відповідь запишіть їхню *суму*. Якщо рівняння не має коренів, то у відповідь запишіть число 100.

*Відповідь:*

**8** Розв'яжіть рівняння  $\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + 2x + 1} + \frac{x - 2}{x + 1} = 6$ .

Якщо рівняння має один корінь, запишіть його у відповідь. Якщо рівняння має кілька коренів, то у відповідь запишіть *найменший* з них. Якщо рівняння не має коренів, то у відповідь запишіть число 100.

*Відповідь:*

ЗАВЕРШИТИ

СКАСУВАТИ

## 2 СИСТЕМИ РІВНЯНЬ

Системи рівнянь відіграють важливу роль у розв'язанні задач з реального життя, де потрібно знайти значення кількох невідомих величин *одночасно*. Вони широко застосовуються в економіці для аналізу ринку, у фізиці для опису руху тіл, а також в інженерії при розробці складних технологічних процесів. Опанування систем рівнянь дозволяє ефективно моделювати та розв'язувати різноманітні практичні задачі.

### ПРИГАДАЙТЕ

**Система рівнянь із двома змінними** – кілька рівнянь із двома змінними, стосовно яких поставлено завдання знайти всі спільні розв'язки.

**Розв'язати систему рівнянь із двома змінними** означає знайти всі її розв'язки або довести, що система розв'язків не має.

**Розв'язком системи рівнянь із двома змінними** називається пара значень змінних, яка перетворює кожне рівняння системи в правильну рівність.

## 1 Системи лінійних рівнянь

**Система лінійних рівнянь із двома змінними** – це система, що має

$$\text{вигляд } \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

Для розв'язання систем лінійних рівнянь із двома змінними традиційно використовують 3 методи: спосіб підстановки; спосіб алгебраїчного додавання; графічний спосіб.

### Розв'язування системи рівнянь із двома змінними способом підстановки

- 1 виразити з одного рівняння системи одну змінну через другу;
- 2 підставити знайдене значення в друге рівняння системи й дістати рівняння відносно другої змінної;
- 3 розв'язати одержане рівняння з однією змінною;
- 4 підставити знайдені значення у вираз для першої змінної й дістати її відповідні значення;
- 5 перевірити, чи є знайдена пара  $(x; y)$  розв'язком заданої системи рівнянь.

**ПРИКЛАД 1.** Розв'яжіть систему рівнянь  $\begin{cases} 2x - y = 1, \\ 3x + 2y = 5. \end{cases}$

З першого рівняння системи виразимо $y$ .	$\begin{cases} -y = 1 - 2x, \\ 3x + 2y = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2x - 1, \\ 3x + 2y = 5. \end{cases}$
Підставимо $2x - 1$ у друге рівняння системи замість $y$ .	$\begin{cases} y = 2x - 1, \\ 3x + 2(2x - 1) = 5. \end{cases}$
Розв'яжемо отримане рівняння зі змінною $x$ .	$\begin{aligned} 3x + 2(2x - 1) &= 5; \\ 3x + 4x - 2 &= 5; \\ 7x &= 7; \\ x &= 1. \end{aligned}$
Знаходимо значення $y$ , підставивши $x = 1$ у перше рівняння системи.	$y = 2x - 1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$
Перевіримо, чи є знайдена пара чисел $(1; 1)$ розв'язком системи. Робимо висновок	$\begin{cases} x = 1, \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \cdot 1 - 1 = 1, \\ 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} 1 = 1, \\ 5 = 5. \end{cases}$

**Відповідь:**  $(1; 1)$ . ◀

**МАТХВИЛИНКА** Розв'яжіть систему рівнянь  $\begin{cases} 4x + 5y = 7, \\ x - 3y = -11. \end{cases}$  Якщо  $(x_0; y_0)$

– розв'язок системи, то  $x_0 \cdot y_0 =$

**Перевірити**

А	Б	В	Г	Д
-6	-2	-1	5	3

### Розв'язування системи рівнянь із двома змінними способом додавання

- 1 зрівняти коефіцієнти при одній зі змінних шляхом почленного множення обох рівнянь на множники, дібрані відповідним чином;
- 2 додати (або відняти) почленно рівняння системи, виключивши одну зі змінних;
- 3 розв'язати одержане рівняння з однією змінною;
- 4 знайти значення другої змінної в такий самий спосіб (або підстановкою знайденого значення змінної в будь-яке із заданих рівнянь системи);
- 5 перевірити, чи є знайдена пара  $(x; y)$  розв'язком заданої системи рівнянь.

**ПРИКЛАД 2.** Розв'яжіть систему рівнянь  $\begin{cases} 5x - 3y = -27, \\ 4x + 5y = 8. \end{cases}$

Помножимо перше рівняння на 5, а друге рівняння – на 3, щоб зрівняти коефіцієнти біля $y$	$\begin{cases} 5x - 3y = -27, &   \cdot 5 \\ 4x + 5y = 8 &   \cdot 3 \end{cases}$ $\begin{cases} 25x - 15y = -135, \\ 24x + 15y = 24 \end{cases}$
Почленно додамо обидва рівняння системи	$(25x + 24x) + (-15y + 15y) = -135 + 24$
Розв'яжемо отримане рівняння	$49x = -111;$ $x = -3$
Підставимо $x = -3$ у друге початкове рівняння системи, щоб визначити $y$	$4 \cdot (-3) + 5y = 8;$ $-12 + 5y = 8;$ $5y = 20;$ $y = 4$
Перевіримо, чи є знайдена пара чисел $(-3; 4)$ розв'язком системи. Робимо висновок	$\begin{cases} x = -3, \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 \cdot (-3) - 3 \cdot 4 = -27, \\ 4 \cdot (-3) + 5 \cdot 4 = 8; \end{cases}$ $\begin{cases} -27 = -27, \\ 8 = 8. \end{cases}$

**Відповідь:**  $(-3; 4)$ . ◀

**МАТХВИЛІНКА** Розв'яжіть систему рівнянь  $\begin{cases} 4x + 3y = 17, \\ 2x - 3y = -5. \end{cases}$  Якщо  $(x_0; y_0)$

– розв'язок системи, то  $y_0 =$

**Перевірити**

А	Б	В	Г	Д
2	$8\frac{1}{3}$	-3	$\frac{1}{3}$	3

### Розв'язування системи рівнянь із двома змінними графічним способом

- 1 побудувати в одній системі координат графіки обох рівнянь;
- 2 знайти координати точки перетину графіків;
- 3 перевірити, чи є знайдена пара чисел розв'язком системи рівнянь.



**ПРИКЛАД 3.** Розв'яжіть систему рівнянь  $\begin{cases} 3x - y = 1, \\ 4x + y = 6. \end{cases}$

Виражаємо в кожному рівнянні змінну $y$ через $x$	$3x - y = 1,$ $y = 3x - 1$	$4x + y = 6,$ $y = 6 - 4x$												
Складемо таблицю відповідних значень $x$ і $y$ для двох точок, що належать графіку	<table border="1"><tr><td><math>x</math></td><td>0</td><td>2</td></tr><tr><td><math>y</math></td><td>-1</td><td>5</td></tr></table>	$x$	0	2	$y$	-1	5	<table border="1"><tr><td><math>x</math></td><td>0</td><td>2</td></tr><tr><td><math>y</math></td><td>6</td><td>-2</td></tr></table>	$x$	0	2	$y$	6	-2
$x$	0	2												
$y$	-1	5												
$x$	0	2												
$y$	6	-2												
Проводимо прямі через точки з координатами: 1) $(0; -1)$ і $(2; 5)$ ; 2) $(0; 6)$ і $(2; -2)$ .														
Знаходимо координати точки перетину графіків рівнянь														
Перевіримо, чи є пара чисел $(1; 2)$ розв'язком системи. Робимо висновок	$\begin{cases} x = 1, \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 \cdot 1 - 2 = 1, \\ 4 \cdot 1 + 2 = 6; \end{cases} \begin{cases} 1 = 1, \\ 6 = 6. \end{cases}$													

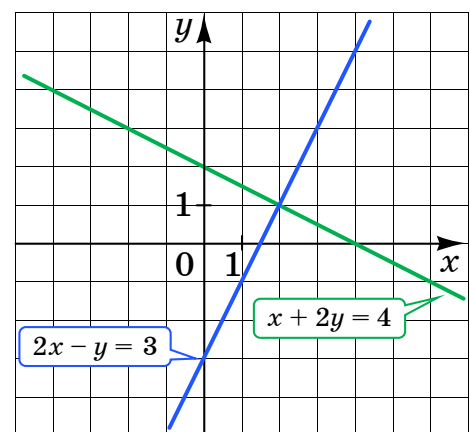
**Відповідь:**  $(1; 2)$ . ◀

**МАТХВИЛКА** На рисунку зображено графіки рівнянь  $x + 2y = 4$  і  $2x - y = 3$ . Користуючись рисунком, розв'яжіть систему рівнянь  $\begin{cases} x + 2y = 4, \\ 2x - y = 3. \end{cases}$  Якщо  $(x_0; y_0)$  – розв'язок системи,

то  $x_0 + y_0 =$

**Перевірити**

<b>А</b>	<b>Б</b>	<b>В</b>	<b>Г</b>	<b>Д</b>
1	2	3	4	5



Графічним способом не завжди можна знайти точні розв'язки системи рівнянь. Цей спосіб є зручним для задач, у яких питають про *кількість розв'язків* системи рівнянь.

Розглянемо взаємне розташування графіків прямих, щоб дізнатися можливі варіанти розв'язків системи лінійних рівнянь.

## Кількість розв'язків систем рівнянь

Система рівнянь	$\begin{cases} x - y = 3, \\ x + y = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} x - y = 2, \\ 2x - 2y = 4 \end{cases}$	$\begin{cases} x + 2y = -4, \\ 2x + 4y = 2 \end{cases}$
Графіки рівнянь			
Розташування прямих	перетинаються	збігаються	паралельні
Кількість розв'язків	один	безліч	розв'язків нема
Загальна схема розв'язання	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

Зауважимо, що графіком кожного з рівнянь системи лінійних рівнянь із двома змінними є пряма. Це дозволяє дійти висновку, що *кількість розв'язків такої системи залежить від взаємного розташування цих прямих*.

**МАТХВИЛКА** Установіть відповідність між системою рівнянь (1–3) та кількістю її розв'язків (А – Д).

**Перевірити**

Система рівнянь

Кількість розв'язків

1 
$$\begin{cases} 6x - 3y = 9, \\ -4x + 2y = -6 \end{cases}$$

А жодного

Б один

2 
$$\begin{cases} 2x + y = 8, \\ x + 2y = -8 \end{cases}$$

В два

Г три

3 
$$\begin{cases} -x + 3y = 5, \\ 2x - 6y = 10 \end{cases}$$

Д безліч

А Б В Г Д

1				
2				
3				

## ПЕРЕВІРТЕ СВОЮ КОМПЕТЕНТНІСТЬ

1 Укажіть усі системи лінійних рівнянь:

Перевірити

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1, \\ x + y = 8; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 12, \\ x - y = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - y = 8, \\ x - y = 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ x + y = 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = 2, \\ 2x - y = 3. \end{cases}$$

2 Укажіть усі системи, для яких пара  $(2; -3)$  є розв'язком даної системи рівнянь:

Перевірити

$$\begin{cases} x - y = 5, \\ x + y = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x - 2y}{4} = 2, \\ x + y = -1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 1, \\ x - 3y = 11; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1, \\ x + 3y = -7; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 4y = 1, \\ 2x + 4y = -8; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{4} = -\frac{y}{6}, \\ 5x + 4y = -2. \end{cases}$$

3 На рисунках 1–3 побудовано графіки функцій  $y = f(x)$  і  $y = g(x)$ . Для кожного випадку вкажіть кількість розв'язків системи  $\begin{cases} y = f(x), \\ y = g(x). \end{cases}$

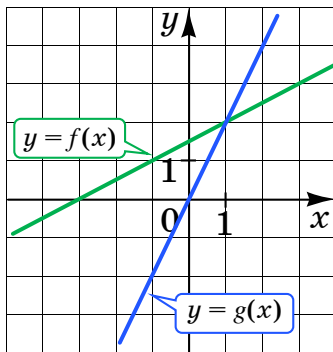


Рис. 1

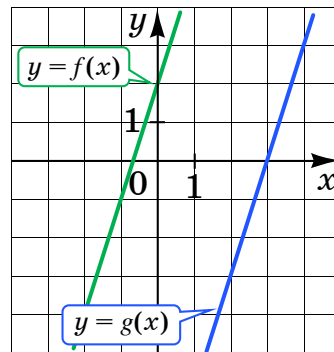


Рис. 2

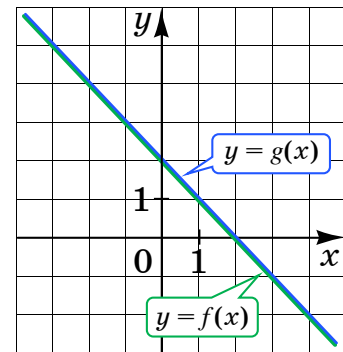


Рис. 3

Перевірити

Скасувати

- 4 Визначте розв'язок  $(x_0; y_0)$  системи рівнянь  $\begin{cases} x + y = 2, \\ x - y = 8, \end{cases}$  використовуючи метод підстановки.

Відповідь: (   ;   )

Перевірити

- 5 Визначте розв'язок  $(x_0; y_0)$  системи рівнянь  $\begin{cases} x = 10y, \\ 2x + y = 21, \end{cases}$  використовуючи метод підстановки.

Відповідь: (   ;   )

Перевірити

- 6 Визначте розв'язок  $(x_0; y_0)$  системи рівнянь  $\begin{cases} 3x = 5y, \\ x - 2y = 1, \end{cases}$  використовуючи метод підстановки.

Відповідь: (   ;   )

Перевірити

- 7 Визначте розв'язок  $(x_0; y_0)$  системи рівнянь  $\begin{cases} 4x - y = 2, \\ 2x + 3y = 15, \end{cases}$  використовуючи метод підстановки.

Відповідь: (   ;   )

Перевірити

- 8 Визначте розв'язок  $(x_0; y_0)$  системи рівнянь  $\begin{cases} \frac{x}{3} = y - 2, \\ 5x - 4y = 3, \end{cases}$  використовуючи метод підстановки.

Відповідь: (   ;   )

Перевірити

- 9 Визначте розв'язок  $(x_0; y_0)$  системи рівнянь  $\begin{cases} \frac{x+2}{5} - \frac{y-2}{4} = 2, \\ 4x + y = 10, \end{cases}$  використовуючи метод підстановки.

Відповідь: (   ;   )

Перевірити

- 10** Визначте розв'язок  $(x_0; y_0)$  системи рівнянь  $\begin{cases} x - 2y = 14, \\ 3x + 2y = 58, \end{cases}$  використовуючи метод додавання.

Відповідь: (     ;     )

Перевірити

- 11** Визначте розв'язок  $(x_0; y_0)$  системи рівнянь  $\begin{cases} 4x - 3y = -6, \\ -4x + y = 2, \end{cases}$  використовуючи метод додавання.

Відповідь: (     ;     )

Перевірити

- 12** Визначте розв'язок  $(x_0; y_0)$  системи рівнянь  $\begin{cases} 2x - 5y = -3, \\ 2x + 3y = -11, \end{cases}$  використовуючи метод додавання.

Відповідь: (     ;     )

Перевірити

- 13** Визначте розв'язок  $(x_0; y_0)$  системи рівнянь  $\begin{cases} -3x + 6y = -15, \\ 4x + 6y = 27, \end{cases}$  використовуючи метод додавання.

Відповідь: (     ;     )

Перевірити

- 14** Визначте розв'язок  $(x_0; y_0)$  системи рівнянь  $\begin{cases} -4x + 6y = -6, \\ 2x + 5y = 27, \end{cases}$  використовуючи метод додавання.

Відповідь: (     ;     )

Перевірити

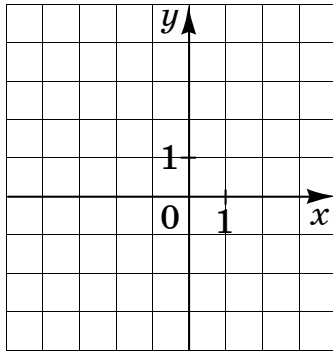
- 15** Визначте розв'язок  $(x_0; y_0)$  системи рівнянь  $\begin{cases} 3x + 2y = -8, \\ 4x + 5y = -6, \end{cases}$  використовуючи метод додавання.

Відповідь: (     ;     )

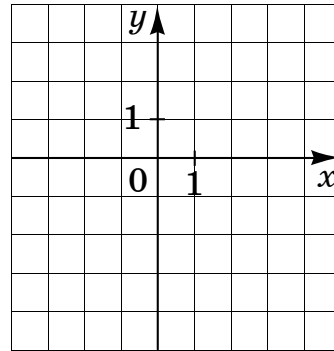
Перевірити

- 16** Розв'яжіть графічно систему рівнянь. Для одержаного розв'язку  $(x_0; y_0)$  системи знайдіть добуток  $x_0 \cdot y_0$ . Перевірити

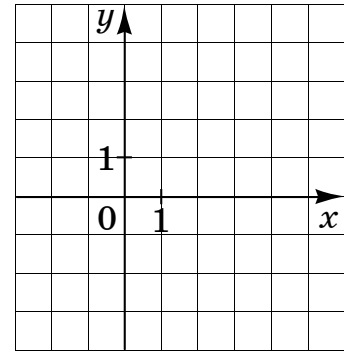
$$1) \begin{cases} x + 2y = 0, \\ 5x + y = -18; \end{cases}$$



$$2) \begin{cases} 4x - y = -5, \\ x + y = -5; \end{cases}$$



$$3) \begin{cases} x - 2y = 1, \\ y - x = -2. \end{cases}$$



Відповідь: 1)

2)

3)

- 17** Визначте кількість розв'язків системи рівнянь:

$$1) \begin{cases} 3x + y = 2, \\ 6x + y = 4; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2x - 3y = 4, \\ -4x + 6y = -8; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} -8x + 6y = 14, \\ -4x + 3y = -7. \end{cases}$$

Перевірити

Скасувати

- 18** Розв'яжіть систему рівнянь  $\begin{cases} 2(4x - 5) - 3(3 + 4y) = 5, \\ 7(6y - 1) - (4 + 3x) = 21y - 86. \end{cases}$

Для одержаного розв'язку  $(x_0; y_0)$  системи знайдіть суму  $x_0 + y_0$ .

Відповідь:

Перевірити

- 19** Розв'яжіть систему рівнянь  $\begin{cases} \frac{15x - 3y}{4} + \frac{3x + 2y}{6} = 3, \\ \frac{3x + y}{3} - \frac{x - 3y}{2} = 6. \end{cases}$

Для одержаного розв'язку  $(x_0; y_0)$  системи знайдіть суму  $x_0 + y_0$ .

Відповідь:

Перевірити

**20** Розв'яжіть систему рівнянь 
$$\begin{cases} (x-3)^2 - 4y = (x+2)(x+1) - 6, \\ (x-4)(y+6) = (x+3)(y-7) + 3. \end{cases}$$

Для одержаного розв'язку  $(x_0; y_0)$  системи знайдіть *суму*  $x_0 + y_0$ .

Відповідь:

Перевірити

**21** Розв'яжіть систему рівнянь 
$$\begin{cases} (x-y)(x+y) - x(x+10) = y(5-y) + 15, \\ (x+1)^2 + (y-1)^2 = (x+4)^2 + (y+2)^2 - 18. \end{cases}$$

Для одержаного розв'язку  $(x_0; y_0)$  системи знайдіть *добуток*  $x_0 \cdot y_0$ .

Відповідь:

Перевірити

**22** Розв'яжіть рівняння  $(x+3)^2 + (y-3)^2 = 0$ .

Для одержаного розв'язку  $(x_0; y_0)$  рівняння знайдіть *добуток*  $x_0 \cdot y_0$ .

Відповідь:

Перевірити

**23** Розв'яжіть рівняння  $(x-4y)^2 + x^2 + 8x + 16 = 0$ .

Для одержаного розв'язку  $(x_0; y_0)$  рівняння знайдіть *суму*  $x_0 + y_0$ .

Відповідь:

Перевірити

**24** Розв'яжіть рівняння  $(2x+y-3)^2 + (x-3y+2)^2 = 0$ .

Для одержаного розв'язку  $(x_0; y_0)$  рівняння знайдіть *суму*  $x_0 + y_0$ .

Відповідь:

Перевірити

**25** Розв'яжіть рівняння  $x^2 + y^2 + 10x - 12y + 61 = 0$ .

Для одержаного розв'язку  $(x_0; y_0)$  рівняння знайдіть *добуток*  $x_0 \cdot y_0$ .

Відповідь:

Перевірити

**26** Розв'яжіть рівняння  $25x^2 + 10y^2 - 30xy + 8y + 16 = 0$ .

Для одержаного розв'язку  $(x_0; y_0)$  рівняння знайдіть *суму*  $x_0 + y_0$ .

Відповідь:

Перевірити

## САМОСТІЙНА РОБОТА №5

Завдання 1–4 мають по п'ять варіантів відповіді, з яких лише ОДИН ПРАВИЛЬНИЙ. Виберіть правильний варіант відповіді й позначте його.

1 Укажіть систему лінійних рівнянь.

А	Б	В	Г	Д
$\begin{cases} xy = 5, \\ x - y = 4 \end{cases}$	$\begin{cases} x^2 - y = 2, \\ 2x + y = 6 \end{cases}$	$\begin{cases} x + y = 2, \\ \frac{x+2}{y-1} = 5 \end{cases}$	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 7, \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} x + 2y = 5, \\ x + y = -9 \end{cases}$

2 Розв'яжіть систему рівнянь  $\begin{cases} y = 2x - 3, \\ 3x - y = 7. \end{cases}$  Якщо  $(x_0; y_0)$  – розв'язок системи, то  $x_0 \cdot y_0 =$

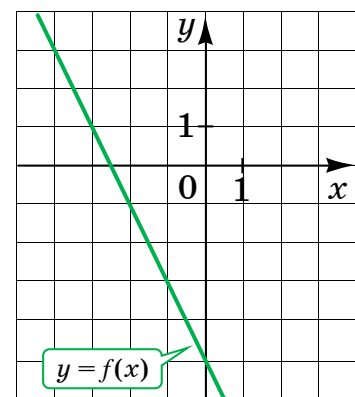
А	Б	В	Г	Д
20	5	170	4	9

3 Розв'яжіть систему рівнянь  $\begin{cases} 2x - 5y = 11, \\ 3x + 5y = 4. \end{cases}$  Якщо  $(x_0; y_0)$  – розв'язок системи, то  $y_0 =$

А	Б	В	Г	Д
3	2,6	-1	2	-3,4

4 На рисунку зображено графік функції  $y = f(x)$ . Користуючись рисунком, розв'яжіть систему рівнянь  $\begin{cases} y = f(x), \\ x - y = 2. \end{cases}$  Якщо  $(x_0; y_0)$  – розв'язок системи, то  $x_0 + y_0 =$

А	Б	В	Г	Д
-3	-4	2	4	-1





У завданні 5 до кожного з трьох рядків інформації, позначених цифрами, доберіть один правильний, на Вашу думку, варіант, позначений буквою.

- 5** Установіть відповідність між системою рівнянь (1–3) та її розв'язком (А – Д).

*Система рівнянь*

*Розв'язок системи рівнянь*

**1** 
$$\begin{cases} 2x - y = 4, \\ -2x + y = -4 \end{cases}$$

**А**  $(x; y) = (5; -1)$

**Б** немає розв'язків

**2** 
$$\begin{cases} x - 3y = 2, \\ 2x - 6y = 1 \end{cases}$$

**В**  $(x; y) = (2; 2)$

**Г**  $(x; y) = (x; 2x - 4)$

**3** 
$$\begin{cases} 2x - 3 = 7, \\ x + y = 4 \end{cases}$$

**Д**  $(x; y) = (2; 6)$

	А	Б	В	Г	Д
1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Розв'яжіть завдання 6–7. Одержані числові відповіді запишіть у спеціально відведеному місці. Відповідь записуйте лише десятковим дробом, урахувавши положення коми. Знак «мінус» записуйте перед першою цифрою числа.

- 6** Розв'яжіть систему рівнянь 
$$\begin{cases} 3x - 4y = 17, \\ 4x + 3y = 6. \end{cases}$$

Для одержаного розв'язку  $(x_0; y_0)$  системи знайдіть *добуток*  $x_0 \cdot y_0$ .

*Відповідь:*

- 7** Розв'яжіть рівняння  $x^2 - 6xy + 9y^2 + (x - 6)^2 = 0$ .

Для одержаного розв'язку  $(x_0; y_0)$  рівняння знайдіть *суму*  $x_0 + y_0$ .

*Відповідь:*

ЗАВЕРШИТИ

СКАСУВАТИ

## 2 Системи рівнянь другого степеня

**Система рівнянь другого степеня з двома змінними** – це система, у якій одне з рівнянь – другого степеня з двома змінними, а друге – рівняння з тими самими змінними другого або першого степеня.

Як і в системах лінійних рівнянь, для розв'язання систем рівнянь другого степеня з двома змінними також використовують 3 методи: спосіб підстановки; спосіб алгебраїчного додавання; графічний спосіб.

**ПРИКЛАД 1.** Розв'яжіть систему рівнянь  $\begin{cases} 3y^2 - xy = -1, \\ x + 3y = 5, \end{cases}$  використовуючи метод підстановки.

ючи метод підстановки.

З другого рівняння системи виразимо $x$	$\begin{cases} 3y^2 - xy = -1, \\ x = 5 - 3y. \end{cases}$
Підставимо $5 - 3y$ у перше рівняння системи замість $x$	$\begin{cases} 3y^2 - (5 - 3y)y = -1, \\ x = 5 - 3y. \end{cases}$
Розв'яжемо отримане рівняння зі змінною $y$	$3y^2 - (5 - 3y)y = -1,$ $3y^2 - 5y + 3y^2 = -1,$ $6y^2 - 5y + 1 = 0,$ $D = (-5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 1 = 25 - 24 = 1,$ $y_1 = \frac{5 - 1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3},$ $y_2 = \frac{5 + 1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$
Знаходимо значення $x_1$ , підставивши $y_1 = \frac{1}{3}$ у друге рівняння системи	$x_1 = 5 - 3y_1 = 5 - 3 \cdot \frac{1}{3} = 5 - 1 = 4$
Знаходимо значення $x_2$ , підставивши $y_2 = \frac{1}{2}$ у друге рівняння системи	$x_2 = 5 - 3y_2 = 5 - 3 \cdot \frac{1}{2} = 5 - \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$
Робимо висновок відносно розв'язків системи рівнянь	$\begin{cases} x = 4, \\ y = \frac{1}{3} \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x = \frac{7}{2}, \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$

Відповідь:  $\left(4; \frac{1}{3}\right), \left(\frac{7}{2}; \frac{1}{2}\right)$ . ◀

**МАТХВИЛІНКА**

Розв'яжіть систему рівнянь  $\begin{cases} x + y = 7, \\ xy = 10. \end{cases}$  Якщо  $(x_1; y_1)$  і

$(x_2; y_2)$  – розв'язки системи, то  $x_1 + y_1 + x_2 + y_2 =$

**Перевірити**

А	Б	В	Г	Д
2	10	5	34	14

**ПРИКЛАД 2.** Розв'яжіть систему рівнянь  $\begin{cases} x^2 - y^2 = 8, \\ x^2 + y^2 = 10, \end{cases}$  використовуючи

метод додавання.

Маємо систему рівнянь другого степеня	$\begin{cases} x^2 - y^2 = 8, \\ x^2 + y^2 = 10, \end{cases}$
Почленно додамо обидва рівняння системи	$(x^2 + x^2) + (-y^2 + y^2) = 8 + 10$
Розв'яжемо отримане рівняння	$\begin{aligned} 2x^2 &= 18, \\ x^2 &= 9, \\ x_1 &= -3 \text{ або } x_2 = 3 \end{aligned}$
Знаходимо значення $y$ , підставивши $x_1 = -3$ , наприклад, у друге рівняння системи	$\begin{aligned} (-3)^2 + y^2 &= 10, \\ 9 + y^2 &= 10, \\ y^2 &= 1; \\ y &= \pm 1 \end{aligned}$
Знаходимо значення $y$ , підставивши $x_2 = 3$ , наприклад, у друге рівняння системи	$\begin{aligned} 3^2 + y^2 &= 10, \\ 9 + y^2 &= 10, \\ y^2 &= 1; \\ y &= \pm 1 \end{aligned}$
Робимо висновок відносно розв'язків системи рівнянь. Для $x = -3$ маємо два значення $y$ : $y_1 = -1; y_2 = 1.$ Для $x = 3$ також маємо два значення $y$ : $y_1 = -1; y_2 = 1$	$\begin{aligned} 1) & \begin{cases} x = -3, \\ y = -1 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x = -3, \\ y = 1; \end{cases} \\ 2) & \begin{cases} x = 3, \\ y = -1 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x = 3, \\ y = 1. \end{cases} \end{aligned}$

**Відповідь:**  $(-3; -1), (-3; 1), (3; -1), (3; 1).$  ◀

**МАТХВИЛИНКА** Розв'яжіть систему рівнянь 
$$\begin{cases} x^2 + xy = 3, \\ 3x - xy = 1. \end{cases}$$

Якщо  $(x_1; y_1)$  і  $(x_2; y_2)$  – розв'язки системи, оберіть *найменший* із добутків  $x_1 \cdot y_1$  і  $x_2 \cdot y_2$ .

Перевірити

А	Б	В	Г	Д
-4	-13	6,5	2	3

**ПРИКЛАД 3.** Розв'яжіть систему рівнянь 
$$\begin{cases} y - x^2 = 1, \\ xy = 2, \end{cases}$$
 використовуючи

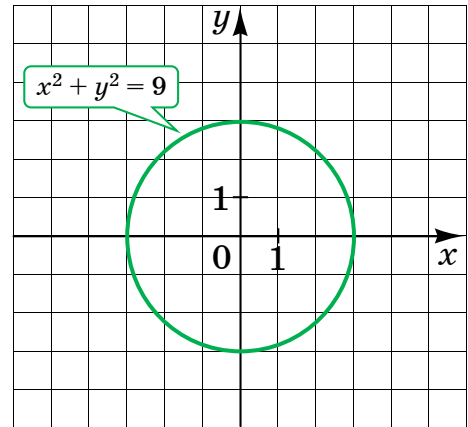
графічний метод.

Виражаємо в кожному рівнянні змінну $y$ через $x$	$\begin{aligned} y - x^2 &= 1, \\ y &= x^2 + 1 \end{aligned}$	$\begin{aligned} xy &= 2, \\ y &= \frac{2}{x} \end{aligned}$																												
Проаналізуємо отримані функції, визначимо «зручні» точки для побудови графіків цих функцій	$y = x^2 + 1$ – квадратична функція, графік – парабола з вершиною $(0; 1)$ .	$y = \frac{2}{x}$ – обернена пропорційність, графік – гіпербола.																												
Побудуємо в одній координатній площині графіки функцій $y = x^2 + 1$ і $y = \frac{2}{x}$	<table border="1"> <tbody> <tr> <td><math>x</math></td> <td>-2</td> <td>-1</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td><math>y</math></td> <td>5</td> <td>2</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>5</td> </tr> </tbody> </table>	$x$	-2	-1	0	1	2	$y$	5	2	1	2	5	<table border="1"> <tbody> <tr> <td><math>x</math></td> <td>-2</td> <td>-1</td> <td>0,5</td> </tr> <tr> <td><math>y</math></td> <td>-1</td> <td>-2</td> <td>-4</td> </tr> </tbody> </table> <table border="1"> <tbody> <tr> <td><math>x</math></td> <td>0,5</td> <td>1</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td><math>y</math></td> <td>4</td> <td>2</td> <td>1</td> </tr> </tbody> </table>	$x$	-2	-1	0,5	$y$	-1	-2	-4	$x$	0,5	1	2	$y$	4	2	1
$x$	-2	-1	0	1	2																									
$y$	5	2	1	2	5																									
$x$	-2	-1	0,5																											
$y$	-1	-2	-4																											
$x$	0,5	1	2																											
$y$	4	2	1																											
Визначимо точки перетину цих функцій																														
Перевіримо, чи є знайдена пара чисел $(1; 2)$ розв'язком системи. Робимо висновок	$\begin{cases} x = 1, \\ y = 2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 - 1^2 = 1, \\ 1 \cdot 2 = 2; \end{cases} \begin{cases} 1 = 1, \\ 2 = 2. \end{cases}$																													

Відповідь:  $(1; 2)$ . ◀

**МАТХВИЛКА** На рисунку зображено графік рівняння  $x^2 + y^2 = 9$ . Користуючись рисунком, визначте кількість розв'язків системи рівнянь  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ y = x^2 - 3. \end{cases}$

Перевірити



А	Б	В	Г	Д
жодного	один	два	три	чотири

Існує ще один спосіб розв'язання систем рівнянь, який спрощує розв'язання – **метод уведення нових змінних**. Розглянемо його на прикладі.

**ПРИКЛАД 4.** Розв'яжіть систему рівнянь  $\begin{cases} (x + y)^2 - 2x^2y^2 = -2, \\ x + y + xy = 7. \end{cases}$

Виконаємо заміну: $a = x + y$ і $b = xy$	$\begin{cases} a^2 - 2b^2 = -2, \\ a + b = 7 \end{cases}$	
Розв'яжемо отриману систему рівнянь методом підстановки: 1) виражаємо з другого рівняння системи $a$ через $b$ ; 2) підставляємо $a = 7 - b$ у перше рівняння системи і розв'язуємо отримане рівняння; 3) підставляємо $b = -11$ і $b = 1$ у рівність $a = 7 - b$ для визначення $a_1$ і $a_2$ .	$\begin{cases} a^2 - 2b^2 = -2, \\ a = 7 - b, \end{cases}$ $(7 - b)^2 - 2b^2 = -2,$ $b^2 + 14b - 51 = 0,$ $b_1 = -17, b_2 = 3$	
Виконаємо обернену заміну: $x + y = a$ і $xy = b$	$\begin{cases} x + y = 24, \\ xy = -17 \end{cases}$	$\begin{cases} x + y = 4, \\ xy = 3 \end{cases}$
Розв'яжемо кожну систему методом підстановки	$\begin{cases} x = 24 - y, \\ xy = -17, \end{cases}$ $(24 - y)y = -17,$ $y^2 - 24y - 17 = 0,$ $y_{1,2} = 12 \pm \sqrt{161}$ $x_{1,2} = 12 \mp \sqrt{161}$	$\begin{cases} x = 4 - y, \\ xy = 3, \end{cases}$ $(4 - y)y = 3,$ $y^2 - 4y + 3 = 0,$ $y_1 = 1, y_2 = 3$ $x_1 = 3, x_2 = 1$

Відповідь:  $(12 - \sqrt{161}; 12 + \sqrt{161}), (12 + \sqrt{161}; 12 - \sqrt{161}), (3; 1), (1; 3)$ . ◀

## МАТХВИЛІНКА

У системі рівнянь 
$$\begin{cases} xy(x-y) = 48, \\ \frac{xy}{x-y} = 3 \end{cases}$$
 виконано заміни:

$xy = u$ ,  $x - y = v$ . Яку систему рівнянь буде отримано?

Перевірити

А	Б	В	Г	Д
$\begin{cases} uv = 48, \\ \frac{v}{u} = 3 \end{cases}$	$\begin{cases} v = 48, \\ u = 3 \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{u}{v} = 48, \\ uv = 3 \end{cases}$	$\begin{cases} uv = 48, \\ \frac{u}{v} = 3 \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{v}{u} = 48, \\ \frac{u}{uv} = 3 \end{cases}$

## ПЕРЕВІРТЕ СВОЮ КОМПЕТЕНТНІСТЬ

- 1 На рисунках 1–3 побудовано графіки функцій  $y = f(x)$  і  $y = g(x)$ . Для кожного випадку вкажіть кількість розв'язків системи  $\begin{cases} y = f(x), \\ y = g(x). \end{cases}$

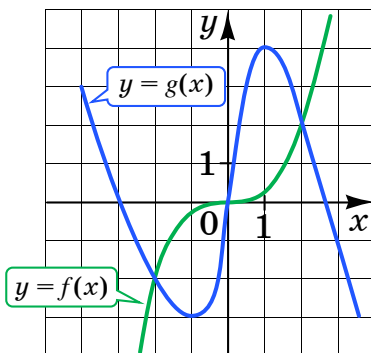


Рис. 1

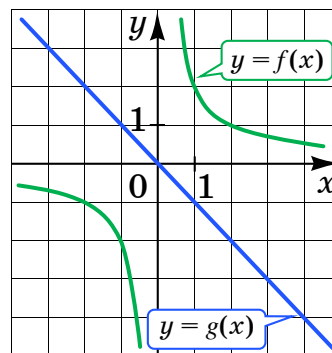


Рис. 2

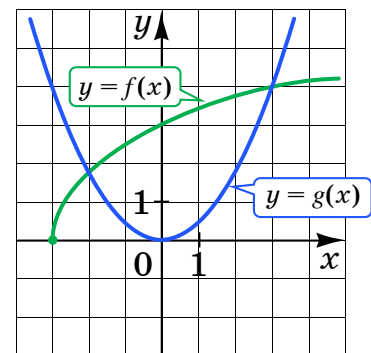


Рис. 3

Перевірити

Скасувати

- 2 Визначте розв'язки  $(x_1; y_1)$  і  $(x_2; y_2)$  системи рівнянь  $\begin{cases} x - y = 3, \\ xy = 28, \end{cases}$  використовуючи метод підстановки.

Відповідь: ( ; ); ( ; )

Перевірити

- 3 Визначте розв'язки  $(x_1; y_1)$  і  $(x_2; y_2)$  системи рівнянь  $\begin{cases} y^2 - x = 14, \\ x - y = -2, \end{cases}$  використовуючи метод підстановки.

Відповідь: ( ; ); ( ; )

Перевірити

- 4** Визначте розв'язки  $(x_1; y_1)$  і  $(x_2; y_2)$  системи рівнянь  $\begin{cases} 2y + xy = 8, \\ x - 4y = 2, \end{cases}$  використовуючи метод підстановки.

Відповідь: ( ; ); ( ; )

Перевірити

- 5** Визначте розв'язки  $(x_1; y_1)$  і  $(x_2; y_2)$  системи рівнянь  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ x - y = 2, \end{cases}$  використовуючи метод підстановки.

Відповідь: ( ; ); ( ; )

Перевірити

- 6** Визначте розв'язки  $(x_1; y_1)$  і  $(x_2; y_2)$  системи рівнянь  $\begin{cases} 2y - xy = 3, \\ y^2 + xy = 5, \end{cases}$  використовуючи метод додавання.

Відповідь: ( ; ); ( ; )

Перевірити

- 7** Визначте розв'язки  $(x_1; y_1)$  і  $(x_2; y_2)$  системи рівнянь  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x^2 - y^2 = -4, \end{cases}$  використовуючи метод додавання.

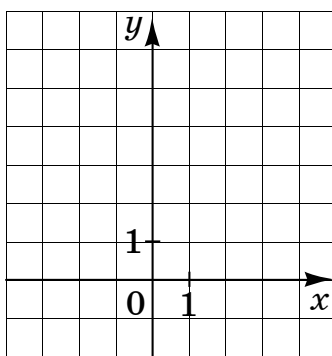
Відповідь: ( ; ); ( ; )

Перевірити

- 8** Розв'яжіть графічно систему рівнянь. Якщо  $(x_0; y_0)$  – розв'язок системи, то знайдіть добуток  $x_0 \cdot y_0$ . Якщо  $(x_1; y_1)$  і  $(x_2; y_2)$  – розв'язки системи, то знайдіть *найбільший* із добутків  $x_1 \cdot y_1$  і  $x_2 \cdot y_2$ .

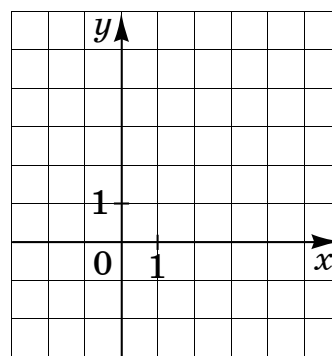
Перевірити

1)  $\begin{cases} y - x^2 = 0, \\ x + y = 2; \end{cases}$



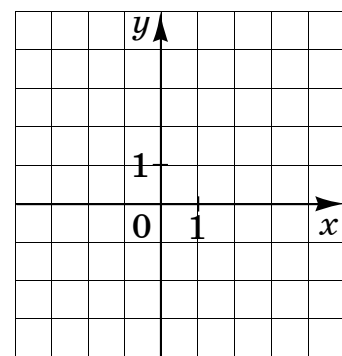
Відповідь: 1)

2)  $\begin{cases} x - y = 2, \\ y = \sqrt{x}; \end{cases}$



2)

3)  $\begin{cases} x + y = 0, \\ xy = -1. \end{cases}$



3)

**9** Розв'яжіть систему рівнянь 
$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 63, \\ y - x = 3. \end{cases}$$

Якщо  $(x_0; y_0)$  – розв'язок системи, то у відповідь запишіть суму  $x_0 + y_0$ .  
Якщо  $(x_1; y_1)$  і  $(x_2; y_2)$  – розв'язки системи, то у відповідь запишіть з найменшу з сум  $x_1 + y_1$  і  $x_2 + y_2$ .

Відповідь:

Перевірити

**10** Розв'яжіть систему рівнянь 
$$\begin{cases} x^2 - xy = -4, \\ 3x^2 - 2xy = -7. \end{cases}$$

Якщо  $(x_0; y_0)$  – розв'язок системи, то у відповідь запишіть суму  $x_0 + y_0$ .  
Якщо  $(x_1; y_1)$  і  $(x_2; y_2)$  – розв'язки системи, то у відповідь запишіть з найбільшу з сум  $x_1 + y_1$  і  $x_2 + y_2$ .

Відповідь:

Перевірити

**11** Розв'яжіть систему рівнянь 
$$\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 3, \\ \frac{3}{x} - \frac{1}{y} = 7. \end{cases}$$

Якщо  $(x_0; y_0)$  – розв'язок системи, то у відповідь запишіть добуток  $x_0 \cdot y_0$ .  
Якщо  $(x_1; y_1)$  і  $(x_2; y_2)$  – розв'язки системи, то у відповідь запишіть з найбільший із добутків  $x_1 \cdot y_1$  і  $x_2 \cdot y_2$ .

Відповідь:

Перевірити

**12** Розв'яжіть систему рівнянь 
$$\begin{cases} \frac{4}{x} + \frac{3}{y} = 1, \\ x + 5y = 3. \end{cases}$$

Якщо  $(x_0; y_0)$  – розв'язок системи, то у відповідь запишіть добуток  $x_0 \cdot y_0$ .  
Якщо  $(x_1; y_1)$  і  $(x_2; y_2)$  – розв'язки системи, то у відповідь запишіть з найменший із добутків  $x_1 \cdot y_1$  і  $x_2 \cdot y_2$ .

Відповідь:

Перевірити



**13** Розв'яжіть систему рівнянь 
$$\begin{cases} 2xy - x = 10, \\ 2xy - y = 9. \end{cases}$$

Якщо  $(x_0; y_0)$  – розв'язок системи, то у відповідь запишіть суму  $x_0 + y_0$ .  
Якщо  $(x_1; y_1)$  і  $(x_2; y_2)$  – розв'язки системи, то у відповідь запишіть з *найменшу* з сум  $x_1 + y_1$  і  $x_2 + y_2$ .

Відповідь:

Перевірити

**14** Розв'яжіть систему рівнянь 
$$\begin{cases} 2x - xy - y = 13, \\ x + xy - 2y = 2. \end{cases}$$

Якщо  $(x_0; y_0)$  – розв'язок системи, то у відповідь запишіть суму  $x_0 + y_0$ .  
Якщо  $(x_1; y_1)$  і  $(x_2; y_2)$  – розв'язки системи, то у відповідь запишіть суму  $x_1 + y_1 + x_2 + y_2$ .

Відповідь:

Перевірити

**15** Розв'яжіть систему рівнянь 
$$\begin{cases} x + y + xy = 5, \\ xy(x + y) = 6. \end{cases}$$

Якщо  $(x_0; y_0)$  – розв'язок системи, то у відповідь запишіть суму  $x_0 + y_0$ .  
Якщо  $(x_1; y_1)$  і  $(x_2; y_2)$  – розв'язки системи, то у відповідь запишіть суму  $x_1 + y_1 + x_2 + y_2$ .

Відповідь:

Перевірити

**16** Розв'яжіть систему рівнянь 
$$\begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{5}{6}, \\ x + y = 6. \end{cases}$$

Якщо  $(x_0; y_0)$  – розв'язок системи, то у відповідь запишіть добуток  $x_0 \cdot y_0$ .  
Якщо  $(x_1; y_1)$  і  $(x_2; y_2)$  – розв'язки системи, то у відповідь запишіть з *найменший* із добутків  $x_1 \cdot y_1$  і  $x_2 \cdot y_2$ .

Відповідь:

Перевірити

**17** Розв'яжіть систему рівнянь 
$$\begin{cases} (x - y)^2 + 4(x - y) + 4 = 0, \\ (x + y)^2 - 2(x + y) - 3 = 0. \end{cases}$$

Якщо  $(x_0; y_0)$  – розв'язок системи, то у відповідь запишіть суму  $x_0 + y_0$ .  
Якщо  $(x_1; y_1)$  і  $(x_2; y_2)$  – розв'язки системи, то у відповідь запишіть суму  $x_1 + y_1 + x_2 + y_2$ .

Відповідь:

Перевірити

## САМОСТІЙНА РОБОТА №6

Завдання 1–4 мають по п'ять варіантів відповіді, з яких лише ОДИН ПРАВИЛЬНИЙ. Виберіть правильний варіант відповіді й позначте його.

1 Укажіть систему рівнянь, для якої пара  $(-1; 4)$  є розв'язком системи.

А	Б	В	Г	Д
$\begin{cases} x + y = 3, \\ x^2 - y^2 = 15 \end{cases}$	$\begin{cases} y + xy = 0, \\ x - xy = -5 \end{cases}$	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 17, \\ xy = -4 \end{cases}$	$\begin{cases} x - y = -5, \\ x^2 + y = 4 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x - \frac{4}{y} = -3, \\ x = 4y \end{cases}$

2 У системі рівнянь  $\begin{cases} (x+y)(x-y) = 8, \\ \frac{x+y}{x-y} = 2 \end{cases}$  виконано заміни:  $x + y = a$  і  $x - y = b$ . Укажіть систему рівнянь, яку буде отримано.

А	Б	В	Г	Д
$\begin{cases} a - b = 8, \\ a + b = 2 \end{cases}$	$\begin{cases} a + b = 8, \\ \frac{a}{b} = 2 \end{cases}$	$\begin{cases} ab = 8, \\ \frac{b}{a} = 2 \end{cases}$	$\begin{cases} a - b = 8, \\ \frac{a}{b} = 2 \end{cases}$	$\begin{cases} ab = 8, \\ \frac{a}{b} = 2 \end{cases}$

3 Розв'яжіть систему рівнянь  $\begin{cases} 3x + xy = 7, \\ 2x - xy = 3. \end{cases}$  Якщо  $(x_0; y_0)$  – розв'язок системи, то  $y_0 =$

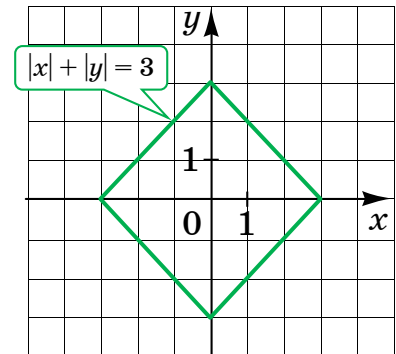
А	Б	В	Г	Д
2	0,5	-1,6	5	4

4 Розв'яжіть систему рівнянь  $\begin{cases} x^2 - 3y = 4, \\ 2x + y = 1. \end{cases}$  Якщо  $(x_1; y_1)$  і  $(x_2; y_2)$  – розв'язки системи, то  $x_1 + y_1 + x_2 + y_2 =$

А	Б	В	Г	Д
8	0	24	22	-8

У завданні 5 до кожного з трьох рядків інформації, позначених цифрами, доберіть один правильний, на Вашу думку, варіант, позначений буквою.

- 5** На рисунку зображено графік рівняння  $|x| + |y| = 3$ . Установіть відповідність між системою рівнянь (1–3) та кількістю її розв’язків (А – Д).



<i>Система рівнянь</i>	<i>Кількість розв’язків</i>
<b>1</b> $\begin{cases}  x  +  y  = 3, \\ y = x + 3 \end{cases}$	<b>А</b> жодного
<b>2</b> $\begin{cases}  x  +  y  = 3, \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$	<b>Б</b> один
<b>3</b> $\begin{cases}  x  +  y  = 3, \\ y = x^2 \end{cases}$	<b>В</b> два
	<b>Г</b> три
	<b>Д</b> безліч

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					

Розв’яжіть завдання 6–7. Одержані числові відповіді запишіть у спеціально відведеному місці. Відповідь записуйте лише десятковим дробом, урахувавши положення коми. Знак «мінус» записуйте перед першою цифрою числа.

- 6** Розв’яжіть систему рівнянь  $\begin{cases} x + 2y = 1, \\ x^2 - xy - y^2 = 11. \end{cases}$

Якщо  $(x_0; y_0)$  – розв’язок системи, то у відповідь запишіть добуток  $x_0 \cdot y_0$ .  
Якщо  $(x_1; y_1)$  і  $(x_2; y_2)$  – розв’язки системи, то у відповідь запишіть з *найменший* із добутків  $x_1 \cdot y_1$  і  $x_2 \cdot y_2$ .

*Відповідь:*

- 7** Розв’яжіть систему рівнянь  $\begin{cases} \frac{x}{y} + xy = -10, \\ \frac{5x}{y} - 2xy = 13. \end{cases}$

Якщо  $(x_0; y_0)$  – розв’язок системи, то у відповідь запишіть добуток  $x_0 \cdot y_0$ .  
Якщо  $(x_1; y_1)$  і  $(x_2; y_2)$  – розв’язки системи, то у відповідь запишіть добуток  $x_1 \cdot y_1 \cdot x_2 \cdot y_2$ .

*Відповідь:*

**ЗАВЕРШИТИ**

**СКАСУВАТИ**

### 3 НЕРІВНОСТІ ТА ЇХ СИСТЕМИ

Нерівності – це математичні вирази, які порівнюють числа або вирази за величиною. Вони використовуються для розв’язання задач, доведення теорем; для опису різних фізичних явищ; для аналізу моделей, оптимізації; для створення умовних операторів у програмуванні... Нерівності допомагають нам вибрати найкращий варіант з декількох можливих. Наприклад, при виборі товару ми порівнюємо ціни та інші характеристики.

#### ПРИГАДАЙТЕ

**Нерівність з однією змінною** – два вирази зі змінною (невідомим), поєднані знаком нерівності:  $>$  (більше),  $<$  (менше),  $\geq$  (більше або дорівнює, не менше),  $\leq$  (менше або дорівнює, не більше).

**Розв’язком нерівності** називається значення змінної (невідомого), при якому нерівність перетворюється в правильну числову нерівність.

**Розв’язати нерівність** означає знайти всі її розв’язки або довести, що їх немає.

#### 1 Лінійні нерівності



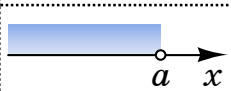

**Лінійні нерівності з однією змінною** – це нерівності виду  $ax \geq b$ , де  $x$  – змінна,  $a$  і  $b$  – деякі числа,  $\geq$  – один із знаків  $>$ ,  $<$ ,  $\geq$ ,  $\leq$ .

Як і в лінійних рівняннях,  $a$  і  $b$  – коефіцієнти нерівності, які називають **параметрами** цієї нерівності. Нерівності  $5x > 20$ ,  $-3x < 9$  є лінійними, а нерівності  $x^2 \geq 4$ ,  $\frac{2}{x-6} < 0$  не є лінійними.

**МАТХВИЛІНКА** Укажіть лінійну нерівність з однією змінною. **Перевірити**

А	Б	В	Г	Д
$9x^2 < 1$	$6x = 12$	$\frac{x}{4} < 8$	$y \geq 2x$	$\frac{x-2}{x+1} < 0$

Розв’язки нерівностей прийнято позначати у вигляді числових проміжків. Наведемо таблицю позначень і зображень числових проміжків.

НЕРІВНІСТЬ	ПРОМІЖОК	ЗОБРАЖЕННЯ	НЕРІВНІСТЬ	ПРОМІЖОК	ЗОБРАЖЕННЯ
$x > a$	$(a; +\infty)$		$x \geq a$	$[a; +\infty)$	
$x < a$	$(-\infty; a)$		$x \leq a$	$(-\infty; a]$	

**МАТХВИЛІНКА** Установіть відповідність між нерівністю (1–4) та проміжком (А – Д), що відповідає розв’язку цієї нерівності.

Перевірити

	Нерівність	Проміжок		А	Б	В	Г	Д
1	$x < -3$	А $(-\infty; -3]$	1					
2	$x \leq -3$	Б $(-3; +\infty)$	2					
3	$x > -3$	В $(-\infty; +\infty)$	3					
4	$x \geq -3$	Г $(-\infty; -3)$	4					
		Д $[-3; +\infty)$						

Для розв’язування лінійних нерівностей потрібно дотримуватися ключових правил переходу від однієї нерівності до рівносильної їй нерівності.

### Рівносильні перетворення рівнянь і нерівностей

	ПРАВИЛО	ПРИКЛАД
1	Якщо з однієї частини нерівності перенести в іншу доданок, <i>змінивши</i> його знак на протилежний, отримаємо нерівність, рівносильну даній.	$x - 3 > 7;$ $x > 7 + 3;$ $x > 10$
2	Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме <i>додатне</i> число, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.	$2x < 8;$ $x < \frac{8}{2};$ $x < 4$
3	Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме <i>від’ємне</i> число, змінивши при цьому знак нерівності на протилежний, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.	$-x > -6;$ $-x \cdot (-1) < -6 \cdot (-1);$ $x < 6$

**МАТХВИЛІНКА** Укажіть нерівність, що є рівносильною для нерівності  $-\frac{x}{5} > 10$ .

Перевірити

А	Б	В	Г	Д
$x < -50$	$x > -2$	$x < -5$	$x > -50$	$x < -2$

Розглянемо особливості розв’язування лінійної нерівності  $ax > b$ , склавши таблицю. Зверніть увагу на залежність розв’язків нерівності від значень параметрів  $a$  і  $b$ .

$ax > b$		
$a > 0$	$a = 0$	$a < 0$
$x > \frac{b}{a}$	$0x > b$	$x < \frac{b}{a}$
$x \in \left(\frac{b}{a}; +\infty\right)$	$b \geq 0$	$b < 0$
	$x \in \emptyset$	$x \in (-\infty; +\infty)$
		$x \in \left(-\infty; \frac{b}{a}\right)$

Інші нерівності, такі як  $ax < b$ ,  $ax \geq b$  та  $ax \leq b$ , розв'язуються за подібними схемами. Кожного разу потрібно аналізувати отриману нерівність і робити правильні висновки.

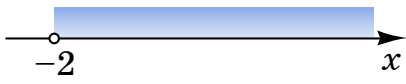
**МАТХВИЛКА** Установіть відповідність між нерівністю (1–4) та її розв'язком (А – Д).

Перевірити

Нерівність	Розв'язок нерівності																															
1 $3x < -12$	А $\emptyset$	<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>А</th> <th>Б</th> <th>В</th> <th>Г</th> <th>Д</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>2</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>3</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>4</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>		А	Б	В	Г	Д	1						2						3						4					
	А		Б	В	Г	Д																										
1																																
2																																
3																																
4																																
2 $-2x < 8$	Б $(-4; +\infty)$																															
3 $x - 4 < x + 4$	В $(-\infty; +\infty)$																															
4 $2x < x + x$	Г $(-\infty; 4)$																															
	Д $(-\infty; -4)$																															

Загалом лінійні нерівності розв'язуються схожим чином, як лінійні рівняння. Розглянемо приклади розв'язання лінійних нерівностей.

**ПРИКЛАД 1.** Розв'яжіть нерівність  $2(x - 4) - 3(x + 2) < 4(x - 1)$ .

Нерівність	$2(x - 4) - 3(x + 2) < 4(x - 1)$
Розкриємо дужки	$2x - 8 - 3x - 6 < 4x - 4$
Перенесемо змінні в ліву частину рівняння, а числа – у праву	$2x - 3x - 4x < -4 + 8 + 6$
Зведемо подібні доданки	$-5x < 10$
Поділимо обидві частини нерівності на $-5$ , при цьому знак нерівності змінюється на протилежний.	$x > \frac{10}{-5} \Rightarrow x > -2$
Будуємо числовий проміжок, що відповідає нерівності $x > -2$	

Відповідь:  $x \in (-2; +\infty)$ . ◀


**МАТХВИЛІНКА** Розв'яжіть нерівність  $(x + 3)^2 \geq x(x + 9)$ .

Перевірити

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 3]$	$[1; +\infty)$	$[3; +\infty)$	$(-\infty; -3]$	$(-\infty; 1]$

**ПРИКЛАД 2.** Знайдіть *найбільший* цілий розв'язок нерівності:

$$\frac{x}{6} - \frac{x+5}{4} \geq x + 2.$$

Нерівність	$\frac{x}{6} - \frac{x+5}{4} \leq x + 2$
Помножимо обидві частини нерівності на 12 – найменше спільне кратне чисел 6 та 4	$12 \cdot \frac{x}{6} - 12 \cdot \frac{x+5}{4} \geq 12 \cdot (x + 2)$
Зведемо нерівність до лінійної	$2x - 3(x + 5) \geq 12(x + 2);$ $2x - 3x - 15 \geq 12x + 24;$ $2x - 3x - 12x \geq 24 + 15;$ $-13x \geq 39;$
Розв'яжемо отриману нерівність	$x \leq -3$
Зобразимо на числовій прямій множину розв'язків отриманої нерівності та визначимо з неї найбільший цілий розв'язок	 <p>Отже, <math>x \in (-\infty; -3]</math>. Тоді <math>-3</math> – це найбільший цілий розв'язок цієї нерівності</p>

Відповідь:  $-3$ . ◀

**МАТХВИЛІНКА** Знайдіть *найменший* цілий розв'язок нерівності

$$\frac{x}{4} - \frac{x}{3} < 1.$$

Перевірити

А	Б	В	Г	Д
$-12$	$0$	$-11$	$1$	$-13$

## ПЕРЕВІРТЕ СВОЮ КОМПЕТЕНТНІСТЬ

1 Укажіть лінійні нерівності.

Перевірити

$$\frac{x}{3} \leq 9;$$

$$0x < 2;$$

$$x^2 + x - 2 > 0;$$

$$5x - 7 > 3(x + 1);$$

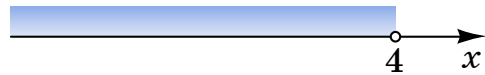
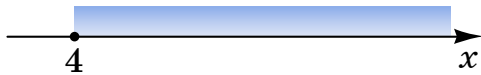
$$\frac{4}{x} > 0;$$

$$(x^2 + 16)(x - 4) \leq 0.$$

2 Доберіть до кожного зображення числового проміжку відповідну йому лінійну нерівність.

Перевірити

Скасувати



3 До кожної нерівності доберіть множину її розв'язків.

1)  $x > -7;$

2)  $x \leq -7;$

3)  $x \geq -7;$

4)  $x < -7;$

Перевірити

Скасувати

4 Знайдіть *найменше* ціле число, що належить проміжку  $(12; +\infty)$ .

Відповідь:

Перевірити

5 Знайдіть *найбільше* ціле число, що належить проміжку  $(-\infty; -7)$ .

Відповідь:

Перевірити

6 Укажіть проміжок, якому належить число 9.

Відповідь:

Перевірити

Скасувати



**7** Укажіть проміжок, якому не належить число 5.

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

**8** Розв'яжіть нерівність  $6x > 30$ .

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

**9** Розв'яжіть нерівність  $-4x < 28$ .

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

**10** Розв'яжіть нерівність  $7x - 3 \geq 18$ .

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

**11** Розв'яжіть нерівність  $5 - 8x \leq 9$ .

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

**12** Розв'яжіть нерівність  $3(x - 5) < 3x - 5$ .

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

**13** Розв'яжіть нерівність  $2x + 3 > 2(x + 3)$ .

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

**14** Знайдіть *найменший* розв'язок нерівності  $3(x - 1) \leq 2(2x + 5)$ . Якщо нерівність не має найменшого розв'язку, у відповідь запишіть число 100.

Відповідь:

Перевірити

**15** Знайдіть *найбільший* розв'язок нерівності  $(x - 4)(x + 4) \geq x(x + 2)$ . Якщо нерівність не має найбільшого розв'язку, у відповідь запишіть число 100.

Відповідь:

Перевірити

- 16** Знайдіть *найменший* цілий розв'язок нерівності  $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} > 5$ . Якщо нерівність не має найменшого цілого розв'язку, то у відповідь запишіть число 100.

Відповідь:

Перевірити

- 17** Знайдіть *найбільший* цілий розв'язок нерівності  $\frac{2x-7}{3} < 1$ . Якщо нерівність не має найбільшого цілого розв'язку, то у відповідь запишіть число 100.

Відповідь:

Перевірити

- 18** Знайдіть *найбільший* розв'язок нерівності  $\frac{2x-1}{4} \geq \frac{3x-5}{5}$ . Якщо нерівність не має найбільшого розв'язку, у відповідь запишіть число 100.

Відповідь:

Перевірити

- 19** Знайдіть *найменший* розв'язок нерівності  $\frac{3x+7}{4} - \frac{5x-2}{2} \leq x$ . Якщо нерівність не має найменшого розв'язку, у відповідь запишіть число 100.

Відповідь:

Перевірити

- 20** Знайдіть *найбільший* цілий розв'язок нерівності  $\frac{5x-3}{9} - \frac{3x+4}{4} > \frac{x+5}{6}$ . Якщо нерівність не має найбільшого цілого розв'язку, у відповідь запишіть число 100.

Відповідь:

Перевірити

- 21** Знайдіть *найменший* розв'язок нерівності  $(x-4)(x+4) - 6x \leq (x-1)^2 + 3$ . Якщо нерівність не має найменшого розв'язку, у відповідь запишіть число 100.

Відповідь:

Перевірити

## САМОСТІЙНА РОБОТА №7

Завдання 1–5 мають по п'ять варіантів відповіді, з яких лише ОДИН ПРАВИЛЬНИЙ. Виберіть правильний варіант відповіді й позначте його.

1 Укажіть лінійну нерівність.

А	Б	В	Г	Д
$x^2 < 9$	$9x > 27$	$\frac{4}{x} \leq x$	$(x + 2)^2 > 0$	$\frac{x - 2}{x + 4} \geq 0$

2 Укажіть *найбільше* ціле число, що належить проміжку  $\left(-\infty; \frac{20}{5}\right)$ .

А	Б	В	Г	Д
2	3	4	5	6

3 Розв'яжіть нерівність  $8x > -4$ .

А	Б	В	Г	Д
$\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$	$[-2; +\infty)$	$(-2; +\infty)$	$(-\infty; -2)$	$\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$

4 Укажіть число, що є розв'язком нерівності  $\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{2}\right)(x + 3) < 0$ .

А	Б	В	Г	Д
-4	-5	-3	-6	-2

5 Розв'яжіть нерівність  $\frac{x + 5}{3} \geq 9$ .

А	Б	В	Г	Д
$[-2; +\infty)$	$[22; +\infty)$	$[32; +\infty)$	$(-\infty; 22]$	$[8; +\infty)$

У завданні 6 до кожного з трьох рядків інформації, позначених цифрами, доберіть один правильний, на Вашу думку, варіант, позначений буквою.

- 6** Установіть відповідність між нерівністю (1–3) та множиною її розв’язків (А – Д).

<i>Нерівність</i>	<i>Множина розв’язків нерівності</i>																									
<b>1</b> $x - 5 < 3(x + 1)$	<b>А</b> $(4; +\infty)$	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th></th> <th>А</th> <th>Б</th> <th>В</th> <th>Г</th> <th>Д</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <th>1</th> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <th>2</th> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <th>3</th> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> </tr> </tbody> </table>		А	Б	В	Г	Д	1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	А		Б	В	Г	Д																				
1	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																				
2	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																				
3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																					
<b>2</b> $5(x - 4) > 5x + 4$	<b>Б</b> $\emptyset$																									
<b>3</b> $2(3x - 1) < 6(x + 2)$	<b>В</b> $(-\infty; -4)$																									
	<b>Г</b> $(-\infty; +\infty)$																									
	<b>Д</b> $(-4; +\infty)$																									

Розв’яжіть завдання 7–8. Одержані числові відповіді запишіть у спеціально відведеному місці. Відповідь записуйте лише десятковим дробом, урахувавши положення коми. Знак «мінус» записуйте перед першою цифрою числа.

- 7** Розв’яжіть нерівність  $(5x - 3)^2 - (3x + 2)^2 \geq (4x - 5)^2$ . У відповідь запишіть *найбільше* число, що є розв’язком цієї нерівності. Якщо нерівність не має найбільшого розв’язку, то у відповідь запишіть число 100.

*Відповідь:*

- 8** Розв’яжіть нерівність  $\frac{x - 3}{2} - \frac{2x + 1}{8} < x + 1$ . У відповідь запишіть *найменше* ціле число, що є розв’язком цієї нерівності. Якщо нерівність не має найменшого цілого розв’язку, то у відповідь запишіть число 100.

*Відповідь:*

**ЗАВЕРШИТИ**

**СКАСУВАТИ**

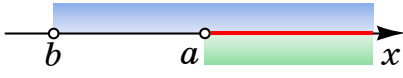
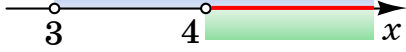
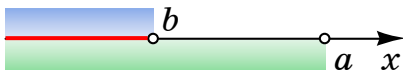



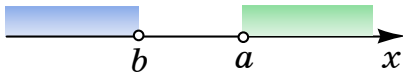
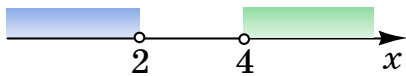
## 2 Системи лінійних нерівностей

**Система лінійних нерівностей з однією змінною** – це система виду

$$\begin{cases} a_1x \geq b_1, \\ a_2x \geq b_2, \end{cases} \text{ де } \geq - \text{ один із знаків } >, <, \geq, \leq.$$

Щоб розв'язати систему нерівностей, треба кожену нерівність системи розв'язати окремо, а потім знайти розв'язок системи як переріз множин розв'язків цих нерівностей.

### Можливі випадки розв'язування систем лінійних нерівностей


СИСТЕМА ЛІНІЙНИХ НЕРІВНОСТЕЙ ( $a > b$ )	РОЗВ'ЯЗОК ТА ЙОГО ГЕОМЕТРИЧНА ІЛЮСТРАЦІЯ	ПРИКЛАД
$\begin{cases} x > a, \\ x > b \end{cases}$	 $x \in (a; +\infty)$	$\begin{cases} x > 4, \\ x > 3 \end{cases}$  $x \in (4; +\infty)$
$\begin{cases} x < a, \\ x < b \end{cases}$	 $x \in (-\infty; b)$	$\begin{cases} x < 6, \\ x < 1 \end{cases}$  $x \in (-\infty; 1)$
$\begin{cases} x < a, \\ x > b \end{cases}$	 $x \in (b; a)$	$\begin{cases} x < 7, \\ x > 5 \end{cases}$  $x \in (5; 7)$
$\begin{cases} x > a, \\ x < b \end{cases}$	 $x \in \emptyset$	$\begin{cases} x > 4, \\ x < 2 \end{cases}$  $x \in \emptyset$

**МАТХВИЛІНКА** Яка система нерівностей не має розв'язків?

**Перевірити**

А	Б	В	Г	Д
$\begin{cases} x > -9, \\ x < -2 \end{cases}$	$\begin{cases} x > -9, \\ x > -2 \end{cases}$	$\begin{cases} x < -9, \\ x > -2 \end{cases}$	$\begin{cases} x < -9, \\ x < -2 \end{cases}$	$\begin{cases} x < -9, \\ 0x > -2 \end{cases}$

**ПРИКЛАД 1.** Розв'яжіть систему нерівностей  $\begin{cases} 3x - 2 < 7, \\ 4 - x \leq 5. \end{cases}$

Розв'яжемо окремо кожну нерівність системи	$\begin{cases} 3x - 2 < 7; \\ 3x < 9; \\ x < 3 \end{cases}$	$\begin{cases} 4 - x \leq 5; \\ -x \leq 1; \\ x \geq -1 \end{cases}$
Отримали систему	$\begin{cases} x < 3, \\ x \geq -1 \end{cases}$	
Зобразимо на числовій прямій множини розв'язків кожної нерівності та знайдемо переріз отриманих проміжків		

**Відповідь:**  $x \in [-1; 3)$ . ◀

**МАТХВИЛІНКА** Розв'яжіть систему нерівностей  $\begin{cases} 3 - 4x > -9, \\ 3x - 2 < -8. \end{cases}$


**Перевірити**

А	Б	В	Г	Д
$(-2; +\infty)$	$(-\infty; -2)$	$(-2; 3)$	$(3; +\infty)$	$(-\infty; 3)$


**Подвійні нерівності** є іншою формою запису систем нерівностей, тому їх також можна розв'язувати за допомогою систем нерівностей.

**ПРИКЛАД 2.** Розв'яжіть подвійну нерівність  $2 \leq 4 - x \leq 8$ .

**Спосіб 1 (перехід до системи нерівностей)**

Перетворимо подвійну нерівність на рівносильну систему двох нерівностей.	$\begin{cases} 4 - x \geq 2, \\ 4 - x \leq 8 \end{cases}$
Розв'яжемо кожну нерівність системи	$\begin{cases} -x \geq -2, & \begin{cases} x \leq 2, \\ x \geq -4 \end{cases} \\ -x \leq 4; \end{cases}$
Зобразимо на числовій прямій множини розв'язків кожної нерівності та знайдемо переріз отриманих проміжків	

**Спосіб 2 (безпосереднє розв'язання подвійної нерівності)**

Маємо подвійну нерівність	$2 \leq 4 - x \leq 8$
Виконаємо віднімання від усіх частин подвійної нерівності числа 4	$2 - 4 \leq 4 - x - 4 \leq 8 - 4;$ $-2 \leq -x \leq 4$
Помножимо всі частини нерівності на $-1$ . При цьому всі знаки нерівності зміняться на протилежні.	$-2 \cdot (-1) \geq -x \cdot (-1) \geq 4 \cdot (-1);$ $2 \geq x \geq -4$
Перепишемо подвійну нерівність	$-4 \leq x \leq 2$
Зобразимо на числовій прямій множину розв'язків подвійної нерівності	

**Відповідь:**  $x \in [-4; 2]$ . ◀

**МАТХВИЛИНКА** Визначте кількість усіх *цілих* розв'язків нерівності  $-3 < 2x + 1 < 9$ . Перевірити

А	Б	В	Г	Д
2	3	4	5	6

**ПЕРЕВІРТЕ СВОЮ КОМПЕТЕНТНІСТЬ**

- 1 Укажіть число, що є розв'язком системи нерівностей  $\begin{cases} x > 4, \\ x < 9. \end{cases}$

**Відповідь:**

Перевірити

Скасувати

- 2 Укажіть число, що не є розв'язком системи нерівностей  $\begin{cases} x < 3, \\ x \leq 5. \end{cases}$

**Відповідь:**

Перевірити

Скасувати

- 3 Укажіть число, що є розв'язком подвійної нерівності  $-1 \leq x < 6$ .

**Відповідь:**

Перевірити

Скасувати

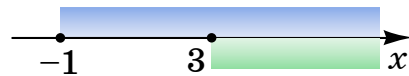
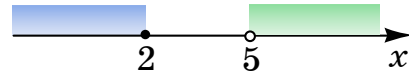
- 4 Укажіть число, що не є розв'язком подвійної нерівності  $-7 < x \leq -2$ .

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

- 5 Доберіть до кожного зображення нерівності відповідний їй розв'язок.



Перевірити

Скасувати

- 6 Доберіть до кожної системи нерівностей відповідний їй розв'язок.

1)  $\begin{cases} x \geq 2, \\ x < 5; \end{cases}$

2)  $\begin{cases} x \leq -4, \\ x \leq -2; \end{cases}$

3)  $\begin{cases} x < 4, \\ x \geq 7; \end{cases}$

4)  $\begin{cases} x > 7, \\ x > 9. \end{cases}$

Перевірити

Скасувати

- 7 Скільки всього *цілих* чисел містить проміжок  $(-8,4; 12,03)$ ?

Відповідь:

Перевірити

- 8 Скільки всього *цілих* чисел містить проміжок  $[-4; 15,6]$ ?

Відповідь:

Перевірити

- 9 Розв'яжіть систему нерівностей  $\begin{cases} x - 4 < 0, \\ 2x \geq -6. \end{cases}$

Відповідь:

Перевірити

Скасувати



10 Розв'яжіть систему нерівностей  $\begin{cases} x + 2 < 9, \\ -3x < -12. \end{cases}$

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

11 Розв'яжіть систему нерівностей  $\begin{cases} 8 - x \geq 5, \\ 2x - 5 < 7. \end{cases}$

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

12 Розв'яжіть систему нерівностей  $\begin{cases} \frac{x}{2} \geq 6, \\ 4 - 3x \leq 16. \end{cases}$

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

13 Розв'яжіть подвійну нерівність  $-2 < x + 5 < 7$ .

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

14 Розв'яжіть подвійну нерівність  $-8 < 4x < 12$ .

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

15 Розв'яжіть подвійну нерівність  $-4 \leq 2 - 3x \leq 11$ .

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

16 Розв'яжіть подвійну нерівність  $-1 < \frac{2x - 1}{3} < 7$ .

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

17 Розв'яжіть систему нерівностей  $\begin{cases} 3x - 7 < 4(3x - 4), \\ 5 - 3x \leq 7 - 2(4x - 9). \end{cases}$

У відповідь запишіть кількість усіх *цілих* розв'язків системи нерівностей. Якщо кількість цілих розв'язків визначити неможливо, то у відповідь запишіть число 100.

Відповідь:

Перевірити

**18** Розв'яжіть систему нерівностей 
$$\begin{cases} 12 - (x - 3) \leq 5(x + 1), \\ -(x - 2) - 3(x - 1) < 2x. \end{cases}$$

У відповідь запишіть *найменше* ціле число, що є розв'язком системи нерівностей. Якщо найменше ціле число визначити неможливо, то у відповідь запишіть число 100.

Відповідь:

Перевірити

**19** Розв'яжіть систему нерівностей 
$$\begin{cases} x \geq \frac{x + 1}{6}, \\ 2(x + 1) + 5 \geq 3(x - 5) + 14. \end{cases}$$

У відповідь запишіть кількість усіх *цілих* розв'язків системи нерівностей. Якщо кількість цілих розв'язків визначити неможливо, то у відповідь запишіть число 100.

Відповідь:

Перевірити

**20** Розв'яжіть систему нерівностей 
$$\begin{cases} \frac{3x - 1}{4} < x + 2, \\ x(x - 2) - 5 > x(x + 1) - 29. \end{cases}$$

У відповідь запишіть кількість усіх *цілих* розв'язків системи нерівностей. Якщо кількість цілих розв'язків визначити неможливо, то у відповідь запишіть число 100.

Відповідь:

Перевірити

**21** Розв'яжіть подвійну нерівність  $x - 7 < 3x + 5 < 2x + 3$ .

У відповідь запишіть *найбільше* ціле число, що є розв'язком подвійної нерівності. Якщо найбільше ціле число визначити неможливо, то у відповідь запишіть число 100.

Відповідь:

Перевірити

**22** Розв'яжіть подвійну нерівність  $3x - 7 \leq \frac{1 - 4x}{2} \leq x + 5$ .

У відповідь запишіть кількість усіх *цілих* розв'язків подвійної нерівності. Якщо кількість цілих розв'язків визначити неможливо, то у відповідь запишіть число 100.

Відповідь:

Перевірити

## САМОСТІЙНА РОБОТА №8

Завдання 1–5 мають по п'ять варіантів відповіді, з яких лише ОДИН ПРАВИЛЬНИЙ. Виберіть правильний варіант відповіді й позначте його.

- 1 Укажіть число, що є розв'язком системи нерівностей  $\begin{cases} x < 7, \\ x > 3. \end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
8	7	5	3	2

- 2 Скільки всього *цілих* чисел містить проміжок  $(-3, 4; \sqrt{100})$ ?

А	Б	В	Г	Д
12	13	14	15	16

- 3 Розв'яжіть подвійну нерівність  $3 \leq x - 6 \leq 12$ .

А	Б	В	Г	Д
$[-3; 6]$	$[-2; 2]$	$\left[\frac{1}{2}; 2\right]$	$[3; 6]$	$[9; 18]$

- 4 Розв'яжіть систему нерівностей  $\begin{cases} 20 < 4x, \\ x + 2 > 6. \end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
$\emptyset$	$(3; +\infty)$	$(4; +\infty)$	$(5; +\infty)$	$(4; 5)$

- 5 Розв'яжіть систему нерівностей  $\begin{cases} \frac{x-3}{2} < x+2, \\ 5x-8 \leq 2(x-1). \end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
$(-7; +\infty)$	$(-\infty; -7)$	$(-7; 2]$	$(-\infty; 2]$	$\emptyset$

У завданні 6 до кожного з трьох рядків інформації, позначених цифрами, доберіть один правильний, на Вашу думку, варіант, позначений буквою.

- 6 Установіть відповідність між системою нерівностей (1–3) та множиною її розв’язків (А – Д).

	Система нерівностей	Множина																									
1	$\begin{cases} x < 5, \\ x > 2 \end{cases}$	А $(-\infty; 2)$	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th></th> <th>А</th> <th>Б</th> <th>В</th> <th>Г</th> <th>Д</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <th>1</th> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <th>2</th> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <th>3</th> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> </tr> </tbody> </table>		А	Б	В	Г	Д	1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	А	Б		В	Г	Д																					
1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																					
2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																					
3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																					
2	$\begin{cases} x > 5, \\ x < 2 \end{cases}$	Б $\emptyset$																									
		В $(5; +\infty)$																									
		Г $(2; 5)$																									
3	$\begin{cases} x < 5, \\ x < 2 \end{cases}$	Д $(-\infty; 5)$																									

Розв’яжіть завдання 7–8. Одержані числові відповіді запишіть у спеціально відведеному місці. Відповідь записуйте лише десятковим дробом, урахувавши положення коми. Знак «мінус» записуйте перед першою цифрою числа.

- 7 Розв’яжіть систему нерівностей  $\begin{cases} (x-1)^2 - x(x-3) < -6, \\ \frac{x}{6} - \frac{x}{8} \geq -2. \end{cases}$

У відповідь запишіть кількість усіх *цілих* розв’язків системи нерівностей. Якщо кількість цілих розв’язків визначити неможливо, то у відповідь запишіть число 100.

Відповідь:

- 8 Розв’яжіть подвійну нерівність  $5 \leq 2x - 9 \leq x + 1$ .

У відповідь запишіть *найбільше* ціле число, що є розв’язком подвійної нерівності. Якщо найбільше ціле число визначити неможливо, то у відповідь запишіть число 100.

Відповідь:

ЗАВЕРШИТИ

СКАСУВАТИ

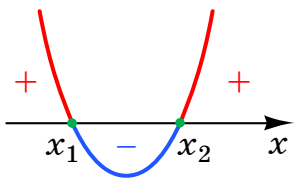
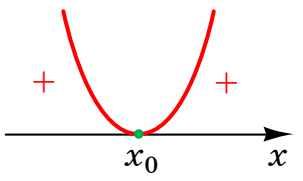
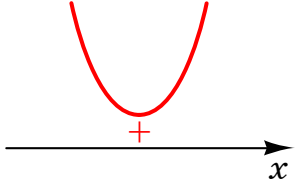
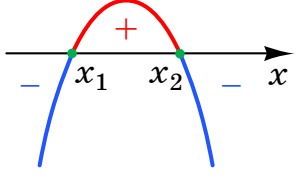
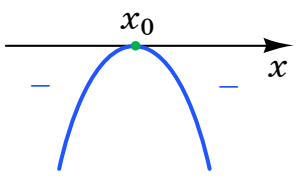
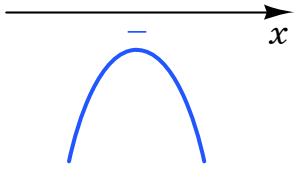
### 3 Квадратні нерівності

**Квадратні нерівності** – це нерівності виду  $ax^2 + bx + c \geq 0$ , де  $a, b, c$  – деякі числа, причому  $a \neq 0$ ,  $\geq$  – один із знаків  $>, <, \geq, \leq$ .

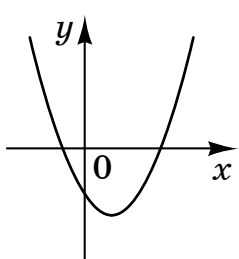
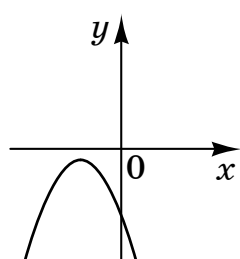
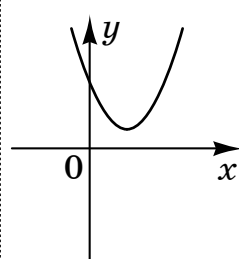
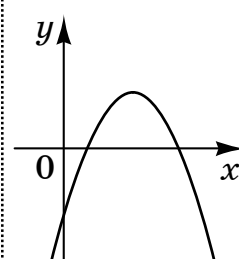
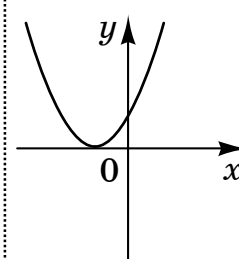
Квадратні нерівності зазвичай розв’язують **графічним методом**:

- 1 розв’язати рівняння  $ax^2 + bx + c = 0$ ;
- 2 нанести на осі  $x$  корені рівняння  $ax^2 + bx + c = 0$ , якщо вони є;
- 3 визначити напрямок віток параболи: якщо  $a > 0$ , то вітки параболи напрямлені вгору, а якщо  $a < 0$  – униз;
- 4 побудувати орієнтовно графік функції  $y = ax^2 + bx + c$ ;
- 5 за графіком визначити розв’язок нерівності  $ax^2 + bx + c \geq 0$ .

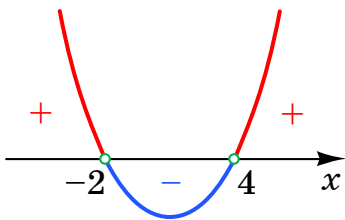
Схематичне розміщення параболи  $y = ax^2 + bx + c$  відносно осі абсцис залежно від знаків чисел  $a$  і  $D = b^2 - 4ac$  відображено в таблиці ( $x_1$  і  $x_2$  – нулі функції,  $x_0$  – абсциса вершини параболи).

$y = ax^2 + bx + c$	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

**МАТХВИЛІНКА** Яка з наведених парабол *може* бути графіком функції  $y = x^2 + px + q$ , якщо рівняння  $x^2 + px + q = 0$  не має коренів? Перевірити

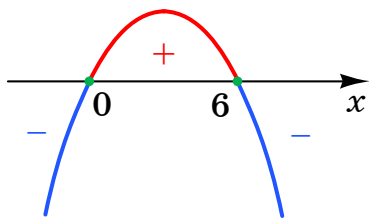
А	Б	В	Г	Д
				

**ПРИКЛАД 1.** Розв'яжіть нерівність  $x^2 - 2x - 8 > 0$ .

Розв'яжемо рівняння $x^2 - 2x - 8 = 0$	$x^2 - 2x - 8 = 0;$ $x_1 = -2; x_2 = 4$
Розглянемо функцію $y = x^2 - 2x - 8$ , графік якої – парабола з вітками, напрямленими вгору; $x_1 = -2; x_2 = 4$ – нулі цієї функції	
Будуємо орієнтовний графік функції $y = x^2 - 2x - 8$ з виколотими нулями	
Оскільки знаком нерівності є «>», то розв'язками нерівності $x^2 - 2x - 8 > 0$ є ті проміжки, які містять знак «+»	$x \in (-\infty; -2) \cup (4; +\infty)$
Для об'єднання двох проміжків використовують знак « $\cup$ »	

**Відповідь:**  $x \in (-\infty; -2) \cup (4; +\infty)$ . ◀

**ПРИКЛАД 2.** Розв'яжіть нерівність  $-x^2 + 6x \leq 0$ .

Розв'яжемо рівняння $-x^2 + 6x = 0$	$-x^2 + 6x = 0;$ $x(-x + 6) = 0;$ $x_1 = 0; x_2 = 6$
Розглянемо функцію $y = -x^2 + 6x$ , графік якої – парабола з вітками, напрямленими вниз; $x_1 = 0; x_2 = 6$ – нулі цієї функції	
Будуємо орієнтовний графік функції $y = -x^2 + 6x$ із замальованими нулями	
Оскільки знаком нерівності є « $\leq$ », то розв'язками нерівності $-x^2 + 6x \leq 0$ є ті проміжки, які містять знак «-»	$x \in (-\infty; 0] \cup [6; +\infty)$

**Відповідь:**  $x \in (-\infty; 0] \cup [6; +\infty)$ . ◀

**МАТХВИЛІНКА** Розв'яжіть нерівність  $x^2 + x - 20 \leq 0$ .

**Перевірити**

А	Б	В	Г	Д
$[-5; 4]$	$(-\infty; -4] \cup [5; +\infty)$	$[-4; 5]$	$(-\infty; -5] \cup [4; +\infty)$	$(-\infty; -5]$

**ПРИКЛАД 3.** Розв'яжіть нерівність  $x^2 - 6x + 9 > 0$ .

Розв'яжемо рівняння $x^2 - 6x + 9 = 0$	$x^2 - 6x + 9 = 0;$ $(x - 3)^2 = 0;$ $x - 3 = 0;$ $x = 3;$
Розглянемо функцію $y = x^2 - 6x + 9$ , графік якої – парабола з вітками, напрямленими вгору; $x = 3$ – нуль цієї функції і є вершиною параболи	
Будуємо орієнтовний графік функції $y = x^2 - 6x + 9$ з виколотим нулем	
Оскільки знаком нерівності є «>», то розв'язками нерівності $x^2 - 6x + 9 > 0$ є ті проміжки, які містять знак «+»	$x \in (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$
При $x = 3$ маємо нерівність $3 > 3$ , що є неправильною, тому це число не входить у розв'язок нерівності	

**Відповідь:**  $x \in (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$ . ◀

**ПРИКЛАД 4.** Розв'яжіть нерівність  $-x^2 + 4x - 5 \leq 0$ .

Розв'яжемо рівняння $-x^2 + 4x - 5 = 0$	$-x^2 + 4x - 5 = 0;$ $D = 4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-5) = -4 < 0.$ Рівняння не має дійсних коренів.
Розглянемо функцію $y = -x^2 + 4x - 5$ , графік якої – парабола з вітками, напрямленими вниз, що не має нулів	
Будуємо орієнтовний графік функції $y = -x^2 + 4x - 5$	
Оскільки знаком нерівності є «≤», то розв'язками нерівності $-x^2 + 4x - 5 \leq 0$ є ті проміжки, які містять знак «-»	$x \in (-\infty; +\infty)$
Уся парабола знаходиться під віссю $x$ , тому нерівність виконується при всіх $x$	

**Відповідь:**  $x \in (-\infty; +\infty)$ . ◀

**МАТХВИЛИНКА** Розв'яжіть нерівність  $x^2 - 2x + 5 > 0$ .

Перевірити

А	Б	В	Г	Д
(1; 5)	$\emptyset$	(5; $+\infty$ )	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; 1) \cup (5; +\infty)$

**ПЕРЕВІРТЕ СВОЮ КОМПЕТЕНТНІСТЬ**

1 Укажіть квадратні нерівності.

Перевірити

$$x^2 + 4x - 5 = 0;$$

$$x^2 \leq 9x;$$

$$\frac{4}{x^2 - 3x} \leq 0;$$

$$x^4 - 15x^2 - 16 < 0;$$

$$4x^2 + 8x + 3 \geq 0;$$

$$x^2 - 25 > 0.$$

2 Укажіть число, що є розв'язком нерівності  $x^2 > 4$ .

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

3 Укажіть число, що є розв'язком нерівності  $x^2 + x < 0$ .

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

4 На рисунку 1 зображено графік функції  $y = x^2 + 2x - 3$ . Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1)  $x^2 + 2x - 3 < 0;$

2)  $x^2 + 2x - 3 \leq 0;$

3)  $x^2 + 2x - 3 > 0;$

4)  $x^2 + 2x - 3 \geq 0.$

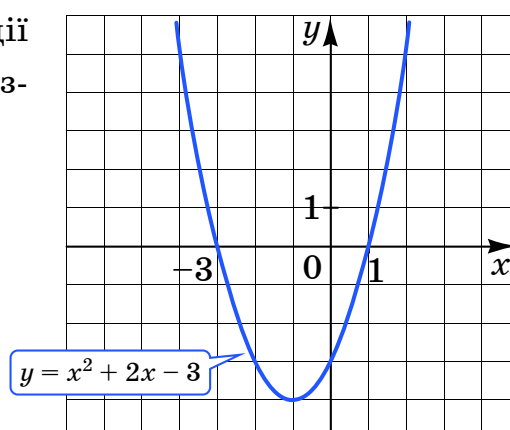


Рис. 1

Перевірити

Скасувати



5 На рисунку 2 зображено графік функції  $y = -x^2 + 2x - 1$ . Знайдіть множину розв'язків нерівності:

- 1)  $-x^2 + 2x - 1 > 0$ ;
- 2)  $-x^2 + 2x - 1 \geq 0$ ;
- 3)  $-x^2 + 2x - 1 < 0$ ;
- 4)  $-x^2 + 2x - 1 \leq 0$ .

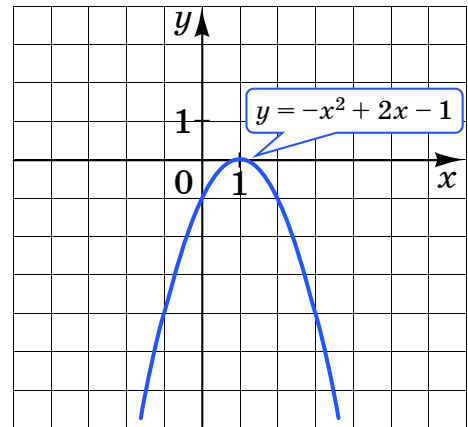


Рис. 2

Перевірити

Скасувати

6 Розв'яжіть нерівність  $x^2 - 9 < 0$ .

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

7 Розв'яжіть нерівність  $-x^2 + 36 \geq 0$ .

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

8 Розв'яжіть нерівність  $x^2 + 2x > 0$ .

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

9 Розв'яжіть нерівність  $-x^2 \leq 8x$ .

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

10 Розв'яжіть нерівність  $x^2 + 6x - 7 > 0$ .

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

11 Розв'яжіть нерівність  $x^2 - 4x - 12 < 0$ .

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

12 Розв'яжіть нерівність  $-x^2 + 7x - 10 \geq 0$ .

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

13 Розв'яжіть нерівність  $-x^2 - 3x + 4 \leq 0$ .

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

14 Розв'яжіть нерівність  $5x^2 + 7x - 6 < 0$ .

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

15 Розв'яжіть нерівність  $2x^2 - x - 10 > 0$ .

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

16 Розв'яжіть нерівність  $4x^2 + 4x + 1 \leq 0$ .

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

17 Розв'яжіть нерівність  $x^2 - 10x + 25 > 0$ .

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

18 Розв'яжіть нерівність  $x^2 - 2x + 10 < 0$ .

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

19 Розв'яжіть нерівність  $-x^2 + 6x - 13 \leq 0$ .

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

- 20 Знайдіть кількість усіх цілих розв'язків нерівності  $(x + 4)^2 \leq x + 6$ . Якщо кількість цілих розв'язків визначити неможливо, у відповідь запишіть число 100.

Відповідь:

Перевірити

- 21 Знайдіть *кількість* усіх цілих розв'язків нерівності  $4x + 1 > (x - 2)(x + 2)$ . Якщо кількість цілих розв'язків визначити неможливо, у відповідь запишіть число 100.

Відповідь:

Перевірити

- 22 Розв'яжіть нерівність  $3x(x + 4) - (2x - 3)(2x + 3) \leq 20$ . У відповідь запишіть *кількість* усіх цілих розв'язків нерівності на проміжку  $[-15; 15]$ .

Відповідь:

Перевірити

- 23 Розв'яжіть нерівність  $(3x + 1)^2 + 15 > 8x(x + 2)$ . У відповідь запишіть *кількість* усіх цілих розв'язків цієї нерівності на проміжку  $[-10; 10]$ .

Відповідь:

Перевірити

- 24 Розв'яжіть систему нерівностей 
$$\begin{cases} 2x^2 - 11x - 6 \geq 0, \\ x + 4 \geq 0. \end{cases}$$

У відповідь запишіть *кількість* усіх цілих розв'язків цієї системи нерівностей на проміжку  $[-10; 10]$ .

Відповідь:

Перевірити

- 25 Розв'яжіть систему нерівностей 
$$\begin{cases} x^2 - 7x - 18 < 0, \\ 5x - x^2 \leq 0. \end{cases}$$

У відповідь *найбільший* цілий розв'язок системи нерівностей. Якщо найменший цілий розв'язок визначити неможливо, у відповідь запишіть число 100.

Відповідь:

Перевірити

- 26 Розв'яжіть систему нерівностей 
$$\begin{cases} x^2 - 7x + 12 \geq 0, \\ x^2 + 3x - 10 < 0. \end{cases}$$

У відповідь *найменший* розв'язок системи нерівностей. Якщо найменший розв'язок визначити неможливо, у відповідь запишіть число 100.

Відповідь:

Перевірити

## САМОСТІЙНА РОБОТА №9

Завдання 1–4 мають по п'ять варіантів відповіді, з яких лише **ОДИН ПРАВИЛЬНИЙ**. Виберіть правильний варіант відповіді й позначте його.

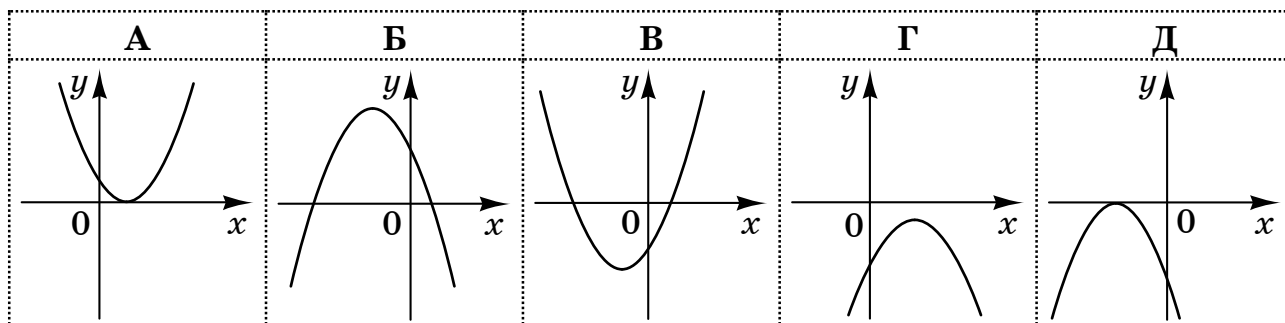
**1** Укажіть квадратну нерівність.

А	Б	В	Г	Д
$1 - 5x > 0$	$x^2(x - 5) \leq 0$	$\frac{x-1}{x} > 0$	$\frac{1}{x^2-4} \leq 0$	$4x^2 - x < 0$

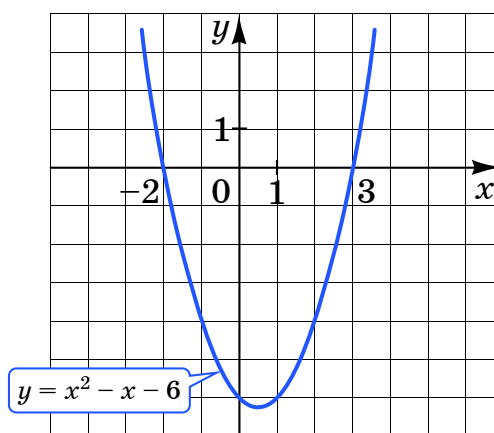
**2** Укажіть число, що є розв'язком нерівності  $2x^2 > 2$ .

А	Б	В	Г	Д
-2	0,5	-1	0	1

**3** На якому рисунку зображено графік функції  $y = -x^2 + px + q$ , якщо рівняння  $-x^2 + px + q = 0$  має лише один корінь?



**4** На рисунку зображено графік функції  $y = x^2 - x - 6$ . Користуючись рисунком, розв'яжіть нерівність  $x^2 - x - 6 \leq 0$ .



А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -2]$	$[-2; 3]$	$(-\infty; 0]$	$(-\infty; -2] \cup [3; +\infty)$	$(-\infty; 3]$

У завданні 5 до кожного з трьох рядків інформації, позначених цифрами, доберіть один правильний, на Вашу думку, варіант, позначений буквою.

- 5** Установіть відповідність між нерівністю (1–3) та множиною її розв’язків (А – Д).

<i>Нерівність</i>	<i>Множина розв’язків нерівності</i>	
1 $x^2 - 10x + 16 > 0$	А $\emptyset$	
2 $x^2 - 8x + 16 < 0$	Б $(-\infty; +\infty)$	
3 $x^2 - 6x + 16 > 0$	В $(-\infty; 2) \cup (8; +\infty)$	
	Г $(2; 8)$	
	Д $(-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$	

	А	Б	В	Г	Д
1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Розв’яжіть завдання 6–7. Одержані числові відповіді запишіть у спеціально відведеному місці. Відповідь записуйте лише десятковим дробом, урахувавши положення коми. Знак «мінус» записуйте перед першою цифрою числа.

- 6** Розв’яжіть нерівність  $(2x + 5)^2 \leq x(x - 8)$ . У відповідь запишіть *найменше* ціле число, що є розв’язком цієї нерівності. Якщо нерівність не має найменшого цілого розв’язку, то у відповідь запишіть число 100.

*Відповідь:*

- 7** Розв’яжіть систему нерівностей 
$$\begin{cases} x^2 > 4, \\ x^2 - x - 20 < 0. \end{cases}$$

У відповідь запишіть *кількість* усіх цілих розв’язків цієї системи нерівностей на проміжку  $[-10; 10]$ .

*Відповідь:*

**ЗАВЕРШИТИ**

**СКАСУВАТИ**

## 4 Метод інтервалів

**Метод інтервалів** – це спосіб розв’язування нерівностей  $f(x) \geq 0$ , де  $\geq$  – один із знаків  $>$ ,  $<$ ,  $\geq$ ,  $\leq$ , який ґрунтується на тому, що неперервна на проміжку функція може змінювати (або не змінювати) знак тільки в тих точках, де її значення дорівнює нулю.

Щоб розв’язати нерівність *методом інтервалів*, потрібно:

- 1 знайти область визначення функції  $y = f(x)$ ;
- 2 знайти всі значення  $x$ , при яких функція  $y = f(x)$  дорівнює нулю, тобто розв’язати рівняння  $f(x) = 0$ ;
- 3 розбити область визначення на проміжки, у яких кожен із кінців є коренем рівняння  $f(x) = 0$  або кінцевою точкою проміжку визначення функції  $y = f(x)$ ;
- 4 визначити знак  $y = f(x)$  на кожному з утворених проміжків;
- 5 об’єднати проміжки, на яких функція  $y = f(x)$  задовольняє нерівність, у множину розв’язків.

Цей метод зазвичай використовують у нерівностях, які складніші за квадратні, але для квадратних нерівностей також можна застосовувати цей спосіб.

**ПРИКЛАД 1.** Розв’яжіть нерівність  $x^2 > 49$ .

Перенесемо число на ліву частину нерівності, щоб використати метод інтервалів	$x^2 - 49 > 0$
Розкладемо на множники вираз $x^2 - 49$	$(x + 7)(x - 7) > 0$
Знайдемо область допустимих значень (ОДЗ) нерівності	ОДЗ: $x \in (-\infty; +\infty)$
Розглянемо функцію $y = (x + 7)(x - 7)$ та знайдемо її нулі	$(x + 7)(x - 7) = 0$ ; $x_1 = -7$ або $x_2 = 7$
На координатній осі $x$ позначимо $x_1 = -7$ та $x_2 = 7$ у відповідності до знаку нерівності	
Визначимо знаки на кожному проміжку, підставляючи звідти «пробні точки» у нерівність	
Оскільки знаком нерівності є «>», то обираємо ті проміжки, які містять знак «+»	$x \in (-\infty; -7) \cup (7; +\infty)$

**Відповідь:**  $x \in (-\infty; -7) \cup (7; +\infty)$ . ◀

**МАТХВИЛИНКА** Розв'яжіть нерівність  $(x - 4)(x + 3) \leq 0$ .

Перевірити

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -4] \cup [3; +\infty)$	$(-\infty; -3]$	$[-3; 4]$	$[-4; 3]$	$(-\infty; -3] \cup [4; +\infty)$

**ПРИКЛАД 2.** Розв'яжіть нерівність  $x(x + 4)^2(x - 5) \leq 0$ .

Знайдемо область допустимих значень (ОДЗ) нерівності	ОДЗ: $x \in (-\infty; +\infty)$
Розглянемо функцію $y = x(x + 4)^2(x - 5)$ та знайдемо її нулі	$x(x + 4)^2(x - 5) = 0$ ; $x_1 = 0$ , або $x_2 = -4$ , або $x_3 = 5$
На координатній осі $x$ позначимо $x_1 = 0$ , $x_2 = -4$ та $x_3 = 5$ у відповідності до знаку нерівності	
Визначимо знаки на кожному проміжку	
Оскільки знаком нерівності є « $\leq$ », то обираємо той проміжок, який містить знак « $-$ », а також точку $x = -4$ , яка є нулем цієї функції: окрім знака « $<$ », маємо ще врахувати знак « $=$ »	$x \in [0; 5] \cup \{-4\}$

Відповідь:  $x \in [0; 5] \cup \{-4\}$ . ◀**МАТХВИЛИНКА** Розв'яжіть нерівність  $x^2(x + 3) \geq 0$ .

Перевірити

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -3] \cup [0; +\infty)$	$[-3; +\infty)$	$[-3; 0) \cup (0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	$[-3; 0]$

**ПРИКЛАД 3.** Розв'яжіть нерівність  $\frac{x + 2}{x - 4} \leq 0$ .

Знайдемо область допустимих значень (ОДЗ) нерівності	ОДЗ: $x - 4 \neq 0$ ; $x \neq 4$
Розглянемо функцію $y = \frac{x + 2}{x - 4}$ та знайдемо її нулі	$\frac{x + 2}{x - 4} = 0$ ; $x + 2 = 0$ ; $x = -2$ .

Закінчення таблиці

На координатній осі $x$ позначимо $x_1 = -2$ , як нуль функції, та $x_2 = 4$ , як точку розриву області визначення функції	
Визначимо знаки на кожному проміжку	
Оскільки знаком нерівності є « $\leq$ », то обираємо той проміжок, який містить знак « $-$ »	
$x \in [-2; 4)$	

Відповідь:  $x \in [-2; 4)$ . ◀

**МАТХВИЛІНКА** Розв'яжіть нерівність  $\frac{3x - 12}{x} > 0$ .

Перевірити

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$	$(0; +\infty)$	$(4; +\infty)$	$(0; 4) \cup (4; +\infty)$	$(0; 4)$

**ПРИКЛАД 4.** Розв'яжіть нерівність  $\frac{(x^2 + 16)(3 - x)}{x^2 - 5x - 6} < 0$ .

Знайдемо область допустимих значень (ОДЗ) нерівності	ОДЗ: $x^2 - 5x - 6 \neq 0$ ; $x_1 \neq -1; x_2 \neq 6$
Розкладемо знаменник на множники	$x^2 - 5x - 6 = (x + 1)(x - 6)$
Розглянемо функцію $y = \frac{(x^2 + 16)(3 - x)}{(x + 1)(x - 6)}$ та знайдемо її нулі	$\frac{(x^2 + 16)(3 - x)}{(x + 1)(x - 6)} = 0$ ; $(x^2 + 16)(3 - x) = 0$
	$x^2 + 16 = 0;$ $3 - x = 0;$ $x \notin \mathbf{R}$ $x = 3$
На координатній осі $x$ позначимо $x_1 = 3$ , як нуль функції, та $x_2 = -1$ і $x_3 = 6$ , як точки розриву області визначення функції	
Визначимо знаки на кожному проміжку	
Оскільки знаком нерівності є « $<$ », то обираємо ті проміжки, які містять знак « $-$ »	
$x \in (-1; 3) \cup (6; +\infty)$	

Відповідь:  $x \in (-1; 3) \cup (6; +\infty)$ . ◀

**МАТХВИЛІНКА** Розв'яжіть нерівність  $\frac{x^2 + 9}{x^2 - 3x} < 0$ .

Перевірити

А	Б	В	Г	Д
$(-3; 0) \cup (3; +\infty)$	$(-\infty; 0)$	$(-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$	$(0; 3)$	$(-\infty; -3) \cup (0; 3)$



## ПЕРЕВІРТЕ СВОЮ КОМПЕТЕНТНІСТЬ

- 1 Укажіть число, що є розв'язком нерівності  $(x - 5)(x + 3) > 0$ .

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

- 2 Укажіть число, що є розв'язком нерівності  $\frac{x - 7}{x + 1} \leq 0$ .

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

- 3 Розв'яжіть нерівність  $(x - 2)(x - 4) < 0$ .

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

- 4 Розв'яжіть нерівність  $x(x + 1)(x + 8) > 0$ .

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

- 5 Розв'яжіть нерівність  $\frac{x - 3}{x - 4} \geq 0$ .

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

- 6 Розв'яжіть нерівність  $\frac{(x + 2)(x - 1)}{x + 3} < 0$ .

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

- 7 Розв'яжіть нерівність  $(x + 6)(x - 4)^2 \leq 0$ .

У відповідь запишіть *найбільше* число, що є розв'язком нерівності. Якщо таке число визначити неможливо, у відповідь запишіть число 100.

Відповідь:

Перевірити

- 8 Розв'яжіть нерівність  $x^2(x + 1)(x - 3) > 0$ .

У відповідь запишіть *кількість* усіх цілих розв'язків цієї нерівності на проміжку  $[-10; 10]$ .

Відповідь:

Перевірити

9 Розв'яжіть нерівність  $\frac{(x-2)^2(x-3)}{x-7} \leq 0$ .

У відповідь запишіть *найменше* ціле число, що є розв'язком нерівності. Якщо таке число визначити неможливо, у відповідь запишіть число 100.

Відповідь:

Перевірити

10 Розв'яжіть нерівність  $\frac{(x+5)^2}{(x-3)(x+4)} \geq 0$ .

У відповідь запишіть *кількість* усіх цілих розв'язків цієї нерівності на проміжку  $[-10; 10]$ .

Відповідь:

Перевірити

11 Розв'яжіть нерівність  $(x^2 + 1)(x - 4)(x + 5) < 0$ .

У відповідь запишіть *кількість* усіх цілих розв'язків цієї нерівності на проміжку  $[-10; 10]$ .

Відповідь:

Перевірити

12 Розв'яжіть нерівність  $\frac{(x-6)(x^2+25)}{x+2} > 0$ .

У відповідь запишіть *кількість* усіх цілих розв'язків цієї нерівності на проміжку  $[-10; 10]$ .

Відповідь:

Перевірити

13 Розв'яжіть нерівність  $x^3 > 9x$ .

У відповідь запишіть *кількість* усіх цілих розв'язків цієї нерівності на проміжку  $[-10; 10]$ .

Відповідь:

Перевірити

14 Розв'яжіть нерівність  $x^3 < 4x(x-1)$ .

У відповідь запишіть *найбільше* ціле число, що є розв'язком нерівності. Якщо таке число визначити неможливо, у відповідь запишіть число 100.

Відповідь:

Перевірити

15 Розв'яжіть нерівність  $x^3 - 2x^2 - 16x + 32 \geq 0$ .

У відповідь запишіть *найменше* ціле число, що є розв'язком нерівності. Якщо таке число визначити неможливо, у відповідь запишіть число 100.

Відповідь:

Перевірити

16 Розв'яжіть нерівність  $x^4 - 17x^2 + 16 < 0$ .

У відповідь запишіть *кількість* усіх цілих розв'язків цієї нерівності на проміжку  $[-10; 10]$ .

Відповідь:

Перевірити

17 Розв'яжіть нерівність  $(x^2 + 7x)(x^2 - 7x + 6) < 0$ .

У відповідь запишіть *найбільше* ціле число, що є розв'язком нерівності. Якщо таке число визначити неможливо, у відповідь запишіть число 100.

Відповідь:

Перевірити

18 Розв'яжіть нерівність  $(x^2 - 9)(x^2 + x - 6) \geq 0$ .

У відповідь запишіть *кількість* усіх цілих розв'язків цієї нерівності на проміжку  $[-10; 10]$ .

Відповідь:

Перевірити

19 Розв'яжіть нерівність  $\frac{6}{x} < 1$ .

У відповідь запишіть *кількість* усіх цілих розв'язків цієї нерівності на проміжку  $[-10; 10]$ .

Відповідь:

Перевірити

20 Розв'яжіть нерівність  $\frac{3}{x-1} > \frac{1}{2}$ .

У відповідь запишіть *кількість* усіх цілих розв'язків цієї нерівності на проміжку  $[-10; 10]$ .

Відповідь:

Перевірити

**21** Розв'яжіть нерівність  $\frac{25}{x} > x$ .

У відповідь запишіть *найбільше* ціле число, що є розв'язком нерівності. Якщо таке число визначити неможливо, у відповідь запишіть число 100.

Відповідь:

Перевірити

**22** Розв'яжіть нерівність  $\frac{x^2}{x+2} \leq 1$ .

У відповідь запишіть *найбільше* ціле число, що є розв'язком нерівності. Якщо таке число визначити неможливо, у відповідь запишіть число 100.

Відповідь:

Перевірити

**23** Розв'яжіть нерівність  $\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 6x} < 0$ .

У відповідь запишіть *найменше* ціле число, що є розв'язком нерівності. Якщо таке число визначити неможливо, у відповідь запишіть число 100.

Відповідь:

Перевірити

**24** Розв'яжіть нерівність  $\frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 6x + 8} \geq 0$ .

У відповідь запишіть *кількість* усіх цілих розв'язків цієї нерівності на проміжку  $[-10; 10]$ .

Відповідь:

Перевірити

**25** Розв'яжіть нерівність  $\frac{8}{x^2 - 4} - \frac{x}{x + 2} < 1$ .

У відповідь запишіть *кількість* усіх цілих розв'язків цієї нерівності на проміжку  $[-10; 10]$ .

Відповідь:

Перевірити

**26** Розв'яжіть нерівність  $\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+3} \geq \frac{2}{x}$ .

У відповідь запишіть *найменше* ціле число, що є розв'язком нерівності. Якщо таке число визначити неможливо, у відповідь запишіть число 100.

Відповідь:

Перевірити

## САМОСТІЙНА РОБОТА №10

Завдання 1–4 мають по п'ять варіантів відповіді, з яких лише ОДИН ПРАВИЛЬНИЙ. Виберіть правильний варіант відповіді й позначте його.

1 Розв'яжіть нерівність  $(x + 6)(x - 2) < 0$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -2) \cup (6; +\infty)$	$(-6; 2)$	$(-\infty; -6) \cup (2; +\infty)$	$(-\infty; -6)$	$(-2; 6)$

2 Розв'яжіть нерівність  $\frac{x}{x-4} \geq 0$ .

А	Б	В	Г	Д
$[0; 4]$	$(-\infty; 0] \cup (4; +\infty)$	$(4; +\infty)$	$(-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$	$[0; 4)$

3 Розв'яжіть нерівність  $(x^2 + 4)(x + 3) \leq 0$ .

А	Б	В	Г	Д
$[-3; -2] \cup [2; +\infty)$	$[-3; 2]$	$(-\infty; -3] \cup [2; +\infty)$	$[2; +\infty)$	$(-\infty; -3]$

4 Розв'яжіть нерівність  $\frac{x+3}{x} > 4$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-1; 0)$	$(-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$	$(0; 1)$	$(-\infty; 1)$	$(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$

У завданні 5 до кожного з трьох рядків інформації, позначених цифрами, доберіть один правильний, на Вашу думку, варіант, позначений буквою.

- 5** Установіть відповідність між нерівністю (1–3) та множиною її розв’язків (А – Д).

<i>Нерівність</i>	<i>Множина розв’язків нерівності</i>																									
1 $\frac{x-1}{x+4} > 0$	А $(-\infty; -4)$	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th></th> <th>А</th> <th>Б</th> <th>В</th> <th>Г</th> <th>Д</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <th>1</th> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <th>2</th> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <th>3</th> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> <td><input type="checkbox"/></td> </tr> </tbody> </table>		А	Б	В	Г	Д	1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	А		Б	В	Г	Д																				
1	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																				
2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																					
3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																					
2 $(x-1)(x+4)^2 < 0$	Б $(1; +\infty)$																									
3 $\frac{(x+4)^2}{x-1} > 0$	В $(-\infty; -4) \cup (-4; 1)$																									
	Г $(-4; 1)$																									
	Д $(-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$																									

Розв’яжіть завдання 6–7. Одержані числові відповіді запишіть у спеціально відведеному місці. Відповідь записуйте лише десятковим дробом, урахувавши положення коми. Знак «мінус» записуйте перед першою цифрою числа.

- 6** Розв’яжіть нерівність  $x^3 + 6x^2 + 9x \geq 0$ .

У відповідь запишіть *найменше* ціле число, що є розв’язком цієї нерівності. Якщо найменше ціле число вказати неможливо, то у відповідь запишіть число 100.

*Відповідь:*

- 7** Розв’яжіть нерівність  $\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x - 15} < 0$ .

У відповідь запишіть *кількість* усіх цілих розв’язків цієї нерівності на проміжку  $[-10; 10]$ .

*Відповідь:*

**ЗАВЕРШИТИ**

**СКАСУВАТИ**

# РОЗДІЛ 2. ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ, НЕРІВНОСТІ ТА ЇХ СИСТЕМИ З ПАРАМЕТРАМИ

## 1 ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ З ПАРАМЕТРАМИ

### ПРИГАДАЙТЕ

**Лінійне рівняння** – це рівняння виду  $ax = b$ , де  $x$  – змінна,  $a$  і  $b$  – деякі числа (параметри).

Розв'язки рівняння  $ax = b$  залежно від значень  $a$  і  $b$ :

- 1 якщо  $a \neq 0$ , то  $x = \frac{b}{a}$ ;
- 2 якщо  $a = 0$  і  $b \neq 0$ , то  $x \in \emptyset$ ;
- 3 якщо  $a = 0$  і  $b = 0$ , то  $x \in \mathbf{R}$ .

При вивченні розв'язків рівнянь ми з вами вже стикалися зі спеціальними числами, від яких залежав розв'язок рівняння. У математиці параметри – це змінні, значення яких залежать від конкретних умов задачі. Вони не є невідомими, як це зазвичай буває з іншими змінними, а виступають в ролі додаткових числових даних, що визначають певні характеристики математичної задачі.

## 1 Існування коренів рівняння залежно від параметра

**Параметр** – це число, від якого залежить розв'язок певного задання. Зазвичай його позначають літерою  $a$ .

Завдання з параметрами слід розглядати послідовно і вивчати структуровано. Будемо починати з найпростіших рівнянь — лінійних. Розглянемо, як зазвичай виглядають лінійні рівняння з параметром.

ЛІНІЙНЕ РІВНЯННЯ БЕЗ ПАРАМЕТРА	ЛІНІЙНЕ РІВНЯННЯ З ПАРАМЕТРОМ
$-7x = 2$	$-7x = a$
$3x - 4 = 5$	$ax - 4 = 5$
$2(x + 3) = 1 + 2x$	$a(x + 3) = 1 + ax$
$\frac{x}{5} = \frac{x - 3}{2}$	$\frac{x}{5} = \frac{x - a}{2}$

**МАТХВИЛКА** Розв'яжіть рівняння  $6x = a$ , якщо  $a = 3$ .

**Перевірити**

А	Б	В	Г	Д
$x = 2$	$x = 3$	$x = \frac{1}{2}$	$x = -3$	$x = \frac{1}{3}$

Пригадаймо, як ми розв'язували звичайні лінійні рівняння без параметрів на прикладах.

$4x - 5 = x + 2$	$6x - 5 = 2(3x - 1)$	$3(4x + 1) = 3 + 12x$
$4x - x = 2 + 5;$ $3x = 7;$ $x = \frac{7}{3}.$	$6x - 5 = 6x - 2;$ $6x - 6x = -2 + 5;$ $0 = 3$ — неправда.	$12x + 3 = 3 + 12x;$ $12 - 12 = 3 - 3;$ $0 = 0$ — правда.
Відповідь: $x = \frac{7}{3}$	Відповідь: коренів нема	Відповідь: безліч коренів

Так само працює і в рівняннях з параметром. Уважаймо, що параметр — це звичайне число, яке може приймати будь-які значення. Тут розглянемо задачі, пов'язані з існуванням коренів лінійного рівняння залежно від значення параметра.

**ПРИКЛАД 1.** Знайдіть кількість усіх цілих значень  $a$  з проміжку  $[-10; 10]$ , за кожного з яких рівняння  $ax = 2a + 1$  має лише один корінь.

Щоб рівняння мало лише один корінь, потрібно розділити обидві частини рівняння на $a \neq 0$	Якщо $a \neq 0$ , то
Отже, якщо $a \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ , то рівняння має корінь $x = \frac{2a + 1}{a}$	$x = \frac{2a + 1}{a}$
Оскільки за умовою потрібно розглянути $a \in [-10; 10]$ , то маємо знайти кількість усіх цілих значень $a \in [-10; 0) \cup (0; 10]$	$\underbrace{-10, -9, -8, \dots, -1}_{10 \text{ значень}}$ $\underbrace{1, 2, 3, \dots, 10}_{10 \text{ значень}}$ $\left. \vphantom{\begin{matrix} -10, -9, -8, \dots, -1 \\ 1, 2, 3, \dots, 10 \end{matrix}} \right\} 20 \text{ значень}$

Відповідь: 20. ◀

**МАТХВИЛИНКА** Якщо  $a \neq -1$  і  $(a + 1)x = a^2 - 1$ , то  $x =$

Перевірити

<b>А</b>	<b>Б</b>	<b>В</b>	<b>Г</b>	<b>Д</b>
$a$	$\frac{1}{a + 1}$	$a - 1$	$(a - 1)(a + 1)^2$	$\frac{1}{a - 1}$

Розглянемо завдання на визначення значення параметра, за якого рівняння не має коренів або має безліч коренів.



**ПРИКЛАД 2.** Знайдіть значення  $a$ , за якого рівняння  $(a - 3)x = 2a - 3$  не має коренів.

Щоб лінійне рівняння не мало коренів, воно повинно мати вигляд $0x = b$ , де $b \neq 0$	$a - 3 = 0;$
Визначимо, за якого значення $a$ дужка $(a - 3)$ перетворюється в 0	$a = 3$
Розглянемо, якого вигляду набуде рівняння, якщо $a = 3$	Якщо $a = 3$ , то: $(3 - 3)x = 2 \cdot 3 - 3;$
Отже, при $a = 3$ рівняння не має коренів, бо рівняння перетворюється в неправильну рівність	$0x = 3$ – неправильна рівність; $x \in \emptyset$

**Відповідь:** 3. ◀

**МАТХВИЛІНКА** Укажіть проміжок, якому належить значення  $a$ , за якого рівняння  $ax = 4a + 5$  не має коренів.

Перевірити

<b>А</b>	<b>Б</b>	<b>В</b>	<b>Г</b>	<b>Д</b>
$(-\infty; 0)$	$[0; 1)$	$[1; 2)$	$[2; 3)$	$[3; +\infty)$

**ПРИКЛАД 3.** Знайдіть значення  $a$ , за якого рівняння  $ax = a^2$  має безліч.

Щоб лінійне рівняння мало безліч коренів, воно повинно мати вигляд $0x = 0$	Якщо $a = 0$ , то: $0x = 0^2;$ $0x = 0$ – правильна рівність; $x \in \mathbf{R}$
З'ясуємо, якого вигляду набуде рівняння, якщо $a = 0$	
Отже, при $a = 0$ рівняння має безліч коренів, бо рівняння перетворюється в правильну числову рівність	

**Відповідь:** 0. ◀

**МАТХВИЛІНКА** Укажіть, за якого значення  $a$  має безліч коренів рівняння  $(a + 5)x = a^2 + 4a - 5$ .

Перевірити

<b>А</b>	<b>Б</b>	<b>В</b>	<b>Г</b>	<b>Д</b>
-5	1	5	-4	-1

**ПРИКЛАД 4.** Знайдіть значення  $a$ , за якого рівняння  $ax - 3 = a - 6x$  не має коренів.

Зведемо рівняння до загального вигляду лінійного рівняння	$ax - 3 = a - 6x;$ $ax + 6x = 3 - a;$ $(a + 6)x = 3 - a$
Щоб лінійне рівняння не мало коренів, воно повинно мати вигляд $0x = b$ , де $b \neq 0$	$a + 6 = 0;$
Визначимо, за якого значення $a$ дужка $(a + 6)$ перетворюється в $0$	$a = -6$
Розглянемо, якого вигляду набуде рівняння, якщо $a = -6$	Якщо $a = -6$ , то: $(-6 + 6)x = 3 - (-6);$
Отже, при $a = -6$ маємо неправильну рівність, тому рівняння не матиме коренів	$0x = 9 - \text{неправильна рівність};$ $x \in \emptyset$

**Відповідь:**  $-6$ . ◀

**ПРИКЛАД 5.** Знайдіть значення  $a$ , за якого рівняння  $a^2x + 2 = a(x + 2)$  має безліч коренів.

Зведемо рівняння до загального вигляду лінійного рівняння	$a^2x + 2 = a(x + 2);$ $a^2x + 2 = ax + 2a;$ $a^2x - ax = 2a - 2;$ $(a^2 - a)x = 2a - 2$
Щоб лінійне рівняння мало безліч коренів, воно повинно мати вигляд $0x = 0$	$a^2 - a = 0;$
Визначимо, за яких значень $a$ дужка $(a^2 - a)$ перетворюється в $0$	$a(a - 1) = 0;$ $a_1 = 0 \text{ або } a_2 = 1$
Розглянемо, якого вигляду набуде рівняння, якщо $a = 0$	Якщо $a = 0$ , то: $(0^2 - 0)x = 2 \cdot 0 - 2;$
Отже, при $a = 0$ рівняння не матиме коренів	$0x = -2 - \text{неправильна рівність};$ $x \in \emptyset$
Розглянемо, якого вигляду набуде рівняння, якщо $a = 1$	Якщо $a = 1$ , то: $(1^2 - 1)x = 2 \cdot 1 - 2;$
Таким чином, при $a = 1$ рівняння матиме безліч коренів	$0x = 0 - \text{правильна рівність};$ $x \in \mathbf{R}$

**Відповідь:**  $1$ . ◀

**МАТХВИЛІНКА** Задано рівняння  $a(ax - 5) = a^2 + 25x$ , де  $x$  – змінна,  $a$  – стала. Установіть відповідність між значенням  $a$  (1–3) та розв’язком рівняння (А – Д).

Перевірити

Значення  $a$

1  $a \in (-\infty; -5) \cup (-5; 5) \cup (5; +\infty)$

2  $a = -5$

3  $a = 5$

	А	Б	В	Г	Д
1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Розв’язок рівняння

А  $x = \frac{a}{a+5}$

Б  $x \in \mathbf{R}$

В  $x = \frac{a-5}{a}$

Г  $x \in \emptyset$

Д  $x = \frac{a}{a-5}$

### ПЕРЕВІРТЕ СВОЮ КОМПЕТЕНТНІСТЬ

1 Укажіть лінійні рівняння з параметром  $a$ .

Перевірити

$$x^2 = a;$$

$$\frac{x-a}{a+5} = 0;$$

$$ax - 5 = 2a;$$

$$4x = a + 1;$$

$$\frac{x}{a} = \frac{a}{x};$$

$$(x+a)(x-4) = 0.$$

2 Розв’яжіть рівняння  $ax = 4$ , якщо  $a = 16$ .

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

3 Розв’яжіть рівняння  $-10x = a + 2$ , якщо  $a = -7$ .

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

4 Розв’яжіть рівняння  $(a+1)x = a-1$ , якщо  $a = -1$ .

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

5 Розв’яжіть рівняння  $(a-3)x = a^2 - 9$ , якщо  $a = 3$ .

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

- 6 Знайдіть кількість усіх цілих значень  $a$  з проміжку  $[-10; 10]$ , за кожного з яких рівняння  $(a - 5)x = 2a$  має лише один корінь.

Відповідь:

Перевірити

- 7 Знайдіть значення  $a$ , за якого рівняння  $ax - 3 = 0$  не має коренів.

Відповідь:

Перевірити

- 8 Знайдіть значення  $a$ , за якого рівняння  $ax - 2a = 0$  має безліч коренів.

Відповідь:

Перевірити

- 9 Знайдіть значення  $a$ , за якого рівняння  $(a + 4)x = a - 1$  не має коренів.

Відповідь:

Перевірити

- 10 Знайдіть значення  $a$ , за якого рівняння  $(a - 5)x = a^2 - 5a$  має безліч коренів.

Відповідь:

Перевірити

- 11 Задано рівняння  $(a^2 - 16)x = a^2 + 4a$ , де  $x$  – змінна,  $a$  – стала.

1. Розв'яжіть рівняння, якщо  $a = 2$ .

Відповідь:

Перевірити

2. Знайдіть значення  $a$ , за якого рівняння не має коренів.

Відповідь:

Перевірити

3. Знайдіть значення  $a$ , за якого рівняння має безліч коренів.

Відповідь:

Перевірити

- 12 Знайдіть значення  $a$ , за якого рівняння  $ax + 6 = a - 3x$  не має коренів.

Відповідь:

Перевірити

- 13 Знайдіть значення  $a$ , за якого рівняння  $ax + 9 = a^2 + 3x$  має безліч коренів.

Відповідь:

Перевірити

14 Знайдіть значення  $a$ , за якого рівняння  $\frac{2ax - a}{5} = x + 2$  не має коренів.

Відповідь:

Перевірити

15 Знайдіть значення  $a$ , за якого рівняння  $ax + 3 = \frac{16a + 3x}{4}$  має безліч коренів.

Відповідь:

Перевірити

16 Знайдіть *найменше* значення  $a$ , за якого рівняння  $a^2x + 1 = 5a(1 - x)$  не має коренів.

Відповідь:

Перевірити

17 Знайдіть *найбільше* значення  $a$ , за якого рівняння  $a^2x = a^3 + 4(x - a)$  має безліч коренів.

Відповідь:

Перевірити

18 Знайдіть *кількість* усіх цілих значень  $a$  з проміжку  $[-10; 10]$ , за кожного з яких рівняння  $\frac{a^2x + 7ax}{10} = 5 - x + a$  має лише один корінь.

Відповідь:

Перевірити

19 Знайдіть усі значення  $a$ , за яких рівняння  $(x - 1)a^2 + (a - 12)x + 16 = 0$  не має коренів. Якщо таке значення  $a$  єдине, то запишіть його у відповідь. Якщо таких значень  $a$  кілька, то у відповідь запишіть їхню *суму*.

Відповідь:

Перевірити

20 Знайдіть усі значення  $a$ , за яких рівняння  $(x + 1)a^2 + (2x - 3)a - 15x = 0$  має безліч коренів. Якщо таке значення  $a$  єдине, то запишіть його у відповідь. Якщо таких значень  $a$  кілька, то у відповідь запишіть їх *добуток*.

Відповідь:

Перевірити

## САМОСТІЙНА РОБОТА №11

Завдання 1–5 мають по п'ять варіантів відповіді, з яких лише ОДИН ПРАВИЛЬНИЙ. Виберіть правильний варіант відповіді й позначте його.

1 Розв'яжіть рівняння  $2ax - 7 = x + a$ , якщо  $a = 3$ .

А	Б	В	Г	Д
$x \in \emptyset$	$x = 2$	$x = 1$	$x = 5$	$x \in \mathbf{R}$

2 Знайдіть значення  $a$ , за якого рівняння  $4ax = 4 + a$  не має коренів.

А	Б	В	Г	Д
4	1	-4	2	0

3 Знайдіть множину всіх значень  $a$ , за яких рівняння  $(a + 4)x = a - 5$  має лише один корінь.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 5) \cup (5; +\infty)$	$\{-4\}$	$\{5\}$	$(-\infty; -4) \cup (-4; +\infty)$	$\{4\}$

4 Укажіть проміжок, якому належить значення  $a$ , за якого рівняння  $(3a - 2)x = 3a^2 - 2a$  має безліч коренів.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -2)$	$[-2; 0)$	$[0; 1)$	$[1; 3)$	$[3; +\infty)$

5 Розв'яжіть рівняння  $ax - 1 = a + 2x$ , якщо  $a \neq -2$ .

А	Б	В	Г	Д
$x = \frac{a+1}{a-2}$	$x \in \emptyset$	$x = \frac{a-2}{a+1}$	$x \in \mathbf{R}$	$x = \frac{a+2}{a-1}$

У завданні 6 до кожного з трьох рядків інформації, позначених цифрами, доберіть один правильний, на Вашу думку, варіант, позначений буквою.

- 6** Задано рівняння  $(a^2 + a)x = a^2 - 1$ , де  $x$  – змінна,  $a$  – стала. Установіть відповідність між значенням  $a$  (1–3) та кількістю коренів рівняння (А – Д).

Значення $a$		Кількість коренів		
1	$a = -1$	А	безліч	
2	$a = 0$	Б	три	
3	$a \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; +\infty)$	В	два	
		Г	один	
		Д	жодного	

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					

Розв'яжіть завдання 7–8. Одержані числові відповіді запишіть у спеціально відведеному місці. Відповідь записуйте лише десятковим дробом, урахувавши положення коми. Знак «мінус» записуйте перед першою цифрою числа.

- 7** Знайдіть значення  $a$ , за якого не має коренів рівняння  $2a^2(2x + 1) - (x + 5a - 1) = (2a - 1)^2$ .

*Відповідь:*

- 8** Знайдіть усі значення  $a$ , за кожного з яких має безліч коренів рівняння  $\frac{(x - 1)a^2 + 3ax}{4} = x - 4$ . Якщо таке значення  $a$  єдине, то запишіть його у відповідь. Якщо таких значень  $a$  кілька, то у відповідь запишіть їхню суму.

*Відповідь:*

ЗАВЕРШИТИ

СКАСУВАТИ

## 2 Оцінювання коренів рівняння залежно від параметра

Розглянемо приклади завдань на дослідження отриманого кореня. Для виконання таких завдань бажано розв'язувати завдання у загальному вигляді, а потім розглядати корінь відповідно до умови завдання.

Для розв'язування завдань, де потрібно знайти значення параметра, при якому корені рівняння мають певні властивості (наприклад, додатні, від'ємні або належать певному проміжку), важливо слідувати таким крокам:

- 1 *знайдіть умови існування коренів*: розв'яжіть рівняння відносно змінної й знайдіть загальний вираз для коренів; це дозволить визначити, за яких значень параметра рівняння має розв'язки;
- 2 *аналіз коренів за умовою*: підставте вирази коренів у необхідну умову і розв'яжіть отримане рівняння або нерівність відносно параметра;
- 3 *перевірка отриманих результатів*: проаналізуйте розв'язок, щоб переконатися, що він задовольняє всі умови завдання, включаючи можливі крайні випадки.

**ПРИКЛАД 1.** Знайдіть значення  $a$ , за якого коренем рівняння  $2ax - 7 = 5$  є число 3.

За умовою відомо, що коренем рівняння є число 3; це означає, що $x = 3$	$2a \cdot 3 - 7 = 5;$
Підставимо $x = 3$ і знайдемо значення $a$	$6a - 7 = 5;$ $6a = 12;$ $a = 2$
Виконаємо перевірку: підставимо у рівняння $a = 2$ і переконаємось у правильності виконаного завдання	$2 \cdot 2 \cdot x - 7 = 5;$ $4x - 7 = 5;$ $4x = 12;$ $x = 3$

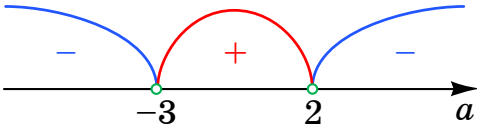
Відповідь: 2. ◀

**МАТХВИЛІНКА** Знайдіть добуток усіх значень  $a$ , за кожного з яких коренем рівняння  $x - 1 = a^2$  є число 5. Перевірити

А	Б	В	Г	Д
-4	11	2	26	-2



**ПРИКЛАД 2.** Знайдіть кількість усіх цілих значень  $a$ , за кожного з яких рівняння  $(2 - a)x = 3 + a$  має додатні корені.

Визначимо, за якого значення $a$ дужка $(2 - a)$ перетворюється в 0	$2 - a = 0;$ $a = 2$
Розглянемо, якого вигляду набуде рівняння, якщо $a = 2$	Якщо $a = 2$ , то: $(2 - 2)x = 3 + 2;$
Отже, при $a = 2$ рівняння не має коренів	$0x = 5$ – неправильна рівність; $x \in \emptyset$
Якщо $a \neq 2$ , то маємо можливість виразити $x$	$x = \frac{3 + a}{2 - a}$
За умовою треба знайти всі такі $a$ , щоб задане рівняння мало <b>додатні корені</b> . Це означає, що слід вимагати, щоб $x > 0$	$\frac{3 + a}{2 - a} > 0$
Розв'яжемо нерівність $\frac{3 + a}{2 - a} > 0$ методом інтервалів	 $a \in (-3; 2)$
Визначимо кількість усіх цілих значень $a$ з проміжку $(-3; 2)$	$\underbrace{-2, -1, 0, 1}_{4 \text{ значення}}$

Відповідь: 4. ◀

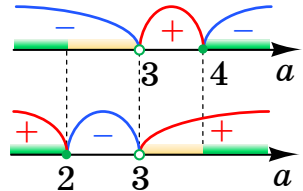
**МАТХВИЛКА** Знайдіть *найменше* ціле значення  $a$ , за якого рівняння  $2ax = a + 4$  має від'ємні корені. Перевірити

А	Б	В	Г	Д
0	1	-3	3	-4

**ПРИКЛАД 3.** Знайдіть кількість усіх цілих значень  $a$  з проміжку  $(-8; 8)$ , за кожного з яких корені рівняння  $ax - 2 = 3x + a$  належать проміжку  $[-4; 6]$ .

Зведемо рівняння до лінійного	$ax - 2 = 3x + a;$ $ax - 3x = a + 2;$ $(a - 3)x = a + 2$
Визначимо, за яких значень $a$ дужка $(a - 3)$ перетворюється в 0	$a - 3 = 0;$ $a = 3$

## Закінчення таблиці

Розглянемо, якого вигляду набуде рівняння, якщо $a = 3$	Якщо $a = 3$ , то: $(3 - 3)x = 3 + 2$ ; $0x = 5$ – неправильна рівність; $x \in \emptyset$
Отже, при $a = 3$ рівняння не має коренів	
Якщо $a \neq 3$ , то маємо можливість виразити $x$	$x = \frac{a + 2}{a - 3}$
За умовою треба знайти всі такі $a$ , щоб корені заданого рівняння належали проміжку $[-4; 6]$ . Це означає, що слід вимагати, щоб $-4 \leq x \leq 6$	$-4 \leq \frac{a + 2}{a - 3} \leq 6$
Розглянемо подвійну нерівність у вигляді системи з двох нерівностей, які розв'яжемо методом інтервалів: після того як визначено проміжки кожної нерівності потрібно знайти <b>всі спільні</b> проміжки, які містяться в кожній нерівності системи	$\begin{cases} \frac{a + 2}{a - 3} \leq 6, \\ \frac{a + 2}{a - 3} \geq -4, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{a + 2}{a - 3} - 6 \leq 0, \\ \frac{a + 2}{a - 3} + 4 \geq 0, \end{cases}$  $\begin{cases} \frac{20 - 5a}{a - 3} \leq 0, \\ \frac{5a - 10}{a - 3} \geq 0 \end{cases}$ $a \in (-\infty; 2] \cup [4; +\infty)$
Оскільки за умовою розглядається $a \in (-8; 8)$ , то маємо проміжок $a \in (-8; 2] \cup [4; 8)$ , з якого потрібно визначити кількість цілих значень $a$	$\underbrace{-7, -6, -5, \dots, 2}_{10 \text{ значень}} \quad \left. \vphantom{\underbrace{-7, -6, -5, \dots, 2}_{10 \text{ значень}}} \right\} 14 \text{ значень}$ $\underbrace{4, 5, 6, 7}_{4 \text{ значення}}$

Відповідь: 14. ◀

**МАТХВИЛИНКА**

Задано рівняння  $ax = a + 3$ , де  $x$  – змінна,  $a$  – стала. Установіть відповідність між значенням кореня рівняння (1–3) та значенням  $a$  (А – Д).

Перевірити

- Значення кореня
- 1  $x = 4$
- 2  $x \geq 0$
- 3  $x \leq 2$

- Значення  $a$
- А  $a = 3$
- Б  $a \in [-3; 0)$
- В  $a = 1$
- Г  $a \in (-\infty; 0) \cup [3; +\infty)$
- Д  $a \in (-\infty; -3] \cup (0; +\infty)$

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					

ПЕРЕВІРТЕ СВОЮ КОМПЕТЕНТНІСТЬ

- 1 Знайдіть значення  $a$ , за якого коренем  $2x = a - 1$  рівняння є число 4.

Відповідь:

Перевірити

- 2 Знайдіть значення  $a$ , за якого коренем  $ax - 5 = x - a$  рівняння є число 3.

Відповідь:

Перевірити

- 3 Укажіть значення  $a$ , за якого рівняння  $(a + 2)x = 3a - 12$  має додатний корінь.

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

- 4 Укажіть значення  $a$ , за якого рівняння  $(a^2 - 1)x = a + 1$  має від'ємний корінь.

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

- 5 Знайдіть *добуток* усіх значень  $a$ , за кожного з яких коренем рівняння  $a(ax - 1) = 4(x + 2)$  є число 1.

Відповідь:

Перевірити

- 6 Знайдіть *найменше* значення  $a$ , за якого коренем рівняння  $x + 8 = \frac{a^2 - ax}{2}$  є число  $-3$ .

Відповідь:

Перевірити

- 7 Знайдіть *суму* всіх цілих значень  $a$ , за кожного з яких рівняння  $(a + 3)x = 16 - 2a$  має невід'ємні корені.

Відповідь:

Перевірити

- 8 Знайдіть *найменше* ціле значення  $a$ , за якого рівняння  $(a - 5)x = 3a + 12$  має недодатні корені.

Відповідь:

Перевірити

- 9 Знайдіть *кількість* усіх цілих значень  $a$ , за кожного з яких корені рівняння  $(4 - a)x = a + 8$  більші за 3.

Відповідь:

Перевірити

- 10 Знайдіть *кількість* усіх цілих значень  $a$ , за кожного з яких корені рівняння  $(a + 5)x = 5a + 2$  менші від 4.

Відповідь:

Перевірити

- 11 Знайдіть *кількість* усіх цілих значень  $a$  з проміжку  $[-10; 10]$ , за кожного з яких рівняння  $\frac{ax - 2}{2} = \frac{4x + a}{4}$  має додатні корені.

Відповідь:

Перевірити

- 12 Знайдіть *кількість* усіх цілих значень  $a$ , за кожного з яких рівняння  $\frac{a - 3x}{3} = \frac{ax - 6}{2}$  має від'ємні корені.

Відповідь:

Перевірити

- 13 Знайдіть усі значення  $a$ , за кожного з яких корені рівняння  $ax + 2(x + a - 1) = (a + 1)^2$  не менші від 4. У відповідь запишіть *найменше* ціле значення  $a$ .

Відповідь:

Перевірити

- 14 Знайдіть усі значення  $a$ , за кожного з яких корені рівняння  $ax + 4 - 3(x + 2) = (a - 4)(a + 4)$  не більші за 2. У відповідь запишіть *найбільше* значення  $a$ .

Відповідь:

Перевірити

- 15 Знайдіть *кількість* усіх цілих значень  $a$  з проміжку  $[-10; 10]$ , за кожного з яких рівняння  $(x - 1)a^2 + (7x + 8)a + 6x - 16 = 0$  має додатні корені.

Відповідь:

Перевірити

- 16** Знайдіть *кількість* усіх цілих значень  $a$  з проміжку  $[-8; 8]$ , за кожного з яких рівняння  $(x + 1)a^2 + (8x + 1)a + 16x - 2 = 0$  має від'ємні корені.

Відповідь:

Перевірити

- 17** Знайдіть *кількість* усіх цілих значень  $a$ , за кожного з яких корені рівняння  $ax + 6 = a - 2x$  належать проміжку  $(-3; 0)$ .

Відповідь:

Перевірити

- 18** Знайдіть *кількість* усіх цілих значень  $a$  з проміжку  $(-5; 5)$ , за кожного з яких корені рівняння  $x + 3a = ax + 6$  належать проміжку  $[0; 4]$ .

Відповідь:

Перевірити

- 19** Знайдіть *кількість* усіх цілих значень  $a$  з проміжку  $(-9; 9)$ , за кожного з яких корені рівняння  $\frac{ax + x + 1}{3} = a - 2$  належать проміжку  $[-2; 5)$ .

Відповідь:

Перевірити

- 20** Знайдіть *найбільше* ціле число, за якого корені рівняння  $x + 2a - 3 = \frac{a + 3 - ax}{2}$  належать проміжку  $(-2; 2]$ .

Відповідь:

Перевірити

- 21** Знайдіть *кількість* усіх цілих значень  $a$ , за кожного з яких корені рівняння  $ax - 2(x + 2a - 7) = (a - 2)^2$  більші за  $-1$ , але менші від  $5$ .

Відповідь:

Перевірити

- 22** Знайдіть *найменше* значення  $a$ , за якого корені рівняння  $ax - 2(x - 8) = (a + 4)^2$  не менші від  $-9$  і не більші за  $3$ .

Відповідь:

Перевірити

## САМОСТІЙНА РОБОТА №12

Завдання 1–3 мають по п'ять варіантів відповіді, з яких лише ОДИН ПРАВИЛЬНИЙ. Виберіть правильний варіант відповіді й позначте його.

- 1 Знайдіть значення  $a$ , за якого коренем  $\frac{x+a}{2} = x - a$  рівняння є число 9.

А	Б	В	Г	Д
9	27	12	3	6

- 2 Знайдіть суму всіх цілих значень  $a$ , за кожного з яких рівняння  $6x + 12 = a(2 - 3x)$  має від'ємні корені.

А	Б	В	Г	Д
18	14	16	12	20

- 3 Знайдіть кількість усіх цілих значень  $a$ , за кожного з яких рівняння  $\frac{3ax+a}{3} = 2x + 3$  має додатні корені.

А	Б	В	Г	Д
3	4	5	6	7

У завданні 4 до кожного з трьох рядків інформації, позначених цифрами, доберіть один правильний, на Вашу думку, варіант, позначений буквою.

- 4 Задано рівняння  $(a - 2)x = a - 4$ , де  $x$  – змінна,  $a$  – стала. Установіть відповідність між умовою для коренів заданого рівняння (1–3) та значенням  $a$  (А – Д).

Умова для коренів

Значення  $a$

1 Коренем є число  $-1$

А  $a \in (-\infty; 1] \cup (2; +\infty)$

2 Корені є невід'ємними

Б  $(2; 4]$

3 Корені не більші за 3

В  $a \in (-\infty; 2) \cup [4; +\infty)$

Г  $[1; 2)$

Д  $a = 3$

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					

Розв'яжіть завдання 5–6. Одержані числові відповіді запишіть у спеціально відведеному місці. Відповідь записуйте лише десятковим дробом, урахувавши положення коми. Знак «мінус» записуйте перед першою цифрою числа.

- 5** Знайдіть *найменше* ціле значення  $a$ , за якого корені рівняння  $(x - a)a = 3(x + 2) + 7a$  не менші від 1.

*Відповідь:*

- 6** Знайдіть *кількість* усіх цілих значень  $a$ , за кожного з яких корені рівняння  $a^2 + (a + 1)x + 11 = (a + 1)^2$  належать проміжку  $(-2; 1)$ .

*Відповідь:*

ЗАВЕРШИТИ

СКАСУВАТИ

## 2 СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ПАРАМЕТРАМИ

Системи лінійних рівнянь з параметрами – це універсальний інструмент, який знаходить застосування в багатьох галузях науки та техніки. Від моделювання фізичних процесів до аналізу економічних систем – цей математичний апарат дозволяє нам описувати складні взаємозв'язки між змінними та знаходити оптимальні рішення. Дослідимо, як параметри впливають на кількість і значення розв'язків систем лінійних рівнянь.

### ПРИГАДАЙТЕ

**Система лінійних рівнянь із двома змінними** – це система, яка має

$$\text{вигляд } \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

- 1 Якщо  $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ , то система має єдиний розв'язок.
- 2 Якщо  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ , то система має безліч розв'язків.
- 3 Якщо  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ , то система не має розв'язків.

### 1 Існування розв'язків системи рівнянь залежно від параметра

Для дослідження систем лінійних рівнянь, що містять параметр, можна використовувати традиційні методи *підстановки* і *додавання*, а також метод коефіцієнтів для визначення кількості розв'язків системи. Розглянемо приклади виконання завдань на дослідження систем лінійних рівнянь з параметром із використанням різних способів.

#### Метод підстановки або додавання:

- 1 *отримайте рівняння з однією змінною*: за допомогою вираження однієї змінної через іншої або використовуючи рівносильні перетворення отримайте лінійне рівняння з однією змінною;
- 2 *дослідіть отримане рівняння*: якщо отримане рівняння має єдиний розв'язок, то система має єдиний розв'язок; якщо значення параметра перетворює рівняння на тотожність, то система має безліч розв'язків; якщо рівняння перетворюється на суперечність, то система не має розв'язків;
- 3 *перевірте отримані значення параметра*: підставте значення параметра в систему, щоб перевірити правильність виконання завдання (цей пункт не є обов'язковим).



**ПРИКЛАД 1.** Знайдіть кількість усіх цілих значень  $a$  з проміжку  $[-8; 8]$ , за кожного з яких система рівнянь  $\begin{cases} 2x - ay = 5, \\ x + 2y = 3 \end{cases}$  має єдиний розв'язок.

Використаємо метод підстановки: виразимо з другого рівняння системи $x$	$\begin{cases} 2x - ay = 5, \\ x = 3 - 2y. \end{cases}$
Підставимо $3 - 2y$ замість $x$ у перше рівняння системи та зведемо отримане рівняння до загального вигляду лінійного рівняння зі змінною $y$	$\begin{aligned} 2(3 - 2y) - ay &= 5; \\ 6 - 4y - ay &= 5; \\ -4y - ay &= -1; \\ 4y + ay &= 1; \\ (4 + a)y &= 1 \end{aligned}$
Визначимо, за яких значень $a$ дужка $(4 + a)$ перетворюється в 0	$\begin{aligned} 4 + a &= 0; \\ a &= -4 \end{aligned}$
Розглянемо, якого вигляду набуде рівняння, якщо $a = -4$	Якщо $a = -4$ , то: $(4 - 4)y = 1;$
Маємо, що при $a = -4$ рівняння не має коренів, а отже, і система рівнянь не матиме розв'язків	$0x = 1$ – неправильна рівність; $y \in \emptyset$
Отже, якщо $a \in (-\infty; -4) \cup (-4; +\infty)$ , то рівняння має корінь $y = \frac{1}{4 + a}$ , а отже, система має єдиний розв'язок	$\left. \begin{array}{l} \underbrace{-8, -7, -6, -5}_{4 \text{ значення}} \\ \underbrace{-3, -2, -1, 0}_{4 \text{ значення}} \\ \underbrace{1, 2, 3, \dots, 8}_{8 \text{ значення}} \end{array} \right\} 16 \text{ значень}$
Оскільки за умовою потрібно розглянути $a \in [-8; 8]$ , то маємо знайти кількість усіх цілих значень $a \in [-8; -4) \cup (-4; 8]$	

Відповідь: 16. ◀

**МАТХВИЛІНКА** Знайдіть множину всіх значень  $a$ , за кожного з яких система рівнянь  $\begin{cases} ax + 6y = 8, \\ x + 3y = a \end{cases}$  має єдиний розв'язок. Перевірити

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$	$\{2\}$	$\{-2\}$	$(-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$	$\{8\}$

**ПРИКЛАД 2.** Знайдіть значення  $a$ , за якого має безліч розв'язків система рівнянь 
$$\begin{cases} 3x - y = 2a - 1, \\ -ax + y = -5. \end{cases}$$

Використаємо метод додавання: додамо почленно рівняння системи	$(3x - ax) + (-y + y) = 2a - 1 - 5;$ $3x - ax = 2a - 6$
Зведемо отримане рівняння до загального вигляду лінійного рівняння зі змінною $x$	$(3 - a)x = 2a - 6$
Визначимо, за яких значень $a$ дужка $(3 - a)$ перетворюється в 0	$3 - a = 0;$ $a = 3$
Розглянемо, якого вигляду набуде рівняння, якщо $a = 3$	Якщо $a = 3$ , то: $(3 - 3)x = 2 \cdot 3 - 6;$
Маємо, що при $a = 3$ рівняння має безліч коренів, а отже, і система рівнянь має безліч розв'язків	$0x = 0$ – правильна рівність; $y \in \mathbf{R}$

Відповідь: 3. ◀

**МАТХВИЛИНКА** Знайдіть значення  $a$ , за якого не має розв'язків система рівнянь 
$$\begin{cases} x - 2ay = -1, \\ x + 3y = a + 2. \end{cases}$$

Перевірити

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{2}{3}$	-3	1,5	3	-1,5

**Метод коефіцієнтів для системи** 
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

1 запишіть відношення відповідних коефіцієнтів системи:

$$\frac{a_1}{a_2}, \frac{b_1}{b_2} \text{ та } \frac{c_1}{c_2}.$$

2 зверніть увагу на значення відношень: якщо система рівнянь повинна мати єдиний розв'язок, то  $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ ; якщо система рівнянь повинна мати безліч розв'язків, то  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ ; якщо система рівнянь не повинна мати розв'язків, то  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ .

**3** проаналізуйте зазначені умови залежно від параметра: відповідно до завдання підставте вираз із параметром у зазначені умови, щоб визначити, за яких значень параметра вони виконуються.

**ПРИКЛАД 3.** Знайдіть усі значення  $a$ , за кожного з яких система рів-

нянь 
$$\begin{cases} 2x - (a - 2)y = 1, \\ (a + 2)x - 6y = 3: \end{cases}$$

- 1) має єдиний розв'язок;
- 2) має безліч розв'язків;
- 3) не має розв'язків.

Використаємо метод коефіцієнтів: запишемо відношення відповідних коефіцієнтів системи та умову безлічі розв'язків системи	$\frac{2}{a+2} = \frac{-(a-2)}{-6} = \frac{1}{3},$ $\frac{2}{a+2} = \frac{a-2}{6} = \frac{1}{3}$	
Перевіримо, за яких $a$ відбувається рівність $\frac{2}{a+2} = \frac{a-2}{6}$	$\frac{2}{a+2} = \frac{a-2}{6},$ $a = \pm 4$	
Виконаємо перевірку значень параметрів	Якщо $a = -4$ , то: $-1 = -1 \neq \frac{1}{3}$	Якщо $a = 4$ , то: $\frac{1}{3} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$
Визначаємо кількість розв'язків системи	Не має розв'язків	Має безліч розв'язків
При $a \neq \pm 4$ маємо єдиний розв'язок	За $a \neq \pm 4$ маємо $\frac{2}{a+2} \neq \frac{a-2}{6}$ , тому система має єдиний розв'язок	

**Відповідь:** 1)  $a \neq \pm 4$ ; 2)  $a = 4$ ; 3)  $a = -4$ . ◀

**МАТХВИЛКА** Задано систему рівнянь 
$$\begin{cases} (a^2 + a)x + y = a^2 - 1, \\ 2ax - y = -8, \end{cases}$$
 де  $x$  і  $y$  —

змінні,  $a$  — стала. Установіть відповідність між значенням  $a$  (1–3) та кількістю розв'язків системи (А – Д).

**Перевірити**

- Значення  $a$**
- 1  $a \in (-\infty; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; +\infty)$
  - 2  $a = 3$
  - 3  $a = -3$

- Кількість розв'язків системи**
- А безліч
  - Б один
  - В два
  - Г три
  - Д жодного

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					

## ПЕРЕВІРТЕ СВОЮ КОМПЕТЕНТНІСТЬ

- 1 Розв'яжіть систему рівнянь  $\begin{cases} x + y = a, \\ x - y = a - 2, \end{cases}$  якщо  $a = 5$ .

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

- 2 Розв'яжіть систему рівнянь  $\begin{cases} x - ay = 3, \\ ax + y = 11, \end{cases}$  якщо  $a = 2$ .

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

- 3 Визначте кількість розв'язків системи  $\begin{cases} ax + y = 2, \\ x + ay = a + 4, \end{cases}$  якщо  $a = 4$ .

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

- 4 Визначте кількість розв'язків системи  $\begin{cases} 2x + ay = 4 + a, \\ 4ax + 2y = -6, \end{cases}$  якщо  $a = -1$ .

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

- 5 Визначте кількість розв'язків системи  $\begin{cases} ax + 2y = a + 2, \\ 6x + (a + 1)y = -10, \end{cases}$  якщо  $a = 3$ .

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

- 6 Укажіть значення  $a$ , за якого система рівнянь  $\begin{cases} 5x - 8y = a, \\ 5x - 8y = 3 \end{cases}$  не має розв'язків.

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

- 7 Укажіть значення  $a$ , за якого система рівнянь  $\begin{cases} 4x + ay = 7, \\ 8x - 6y = 14 \end{cases}$  має безліч розв'язків.

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

- 8 Укажіть усі значення  $a$ , за яких система рівнянь  $\begin{cases} x + y = 1, \\ ax - y = -2 \end{cases}$  має єдиний розв'язок.

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

- 9 Знайдіть значення  $a$ , за якого система рівнянь  $\begin{cases} ax + y = 3a + 1, \\ 4x + y = 2a - 3 \end{cases}$  не має розв'язків.

Відповідь:

Перевірити

- 10 Знайдіть значення  $a$ , за якого система рівнянь  $\begin{cases} x + 5y = a, \\ x - ay = -5 \end{cases}$  має безліч розв'язків.

Відповідь:

Перевірити

- 11 Задано систему рівнянь  $\begin{cases} a^2y - x = a, \\ x - y = a^2, \end{cases}$  де  $x$  і  $y$  – змінні,  $a$  – стала.

1. Визначте розв'язок  $(x_0; y_0)$  системи рівнянь, якщо  $a = 2$ .

Відповідь: (     ;     )

Перевірити

2. Знайдіть значення  $a$ , за якого система рівнянь не має розв'язків.

Відповідь:

Перевірити

3. Знайдіть значення  $a$ , за якого система рівнянь має безліч розв'язків.

Відповідь:

Перевірити

- 12 Знайдіть усі значення  $a$ , за кожного з яких система рівнянь  $\begin{cases} ax + (a + 6)y = 3, \\ x + ay = a - 2 \end{cases}$  має безліч розв'язків. Якщо таке значення  $a$  єдине, то запишіть його у відповідь. Якщо таких значень  $a$  кілька, то у відповідь запишіть їхню суму.

Відповідь:

Перевірити

- 13 Знайдіть усі значення  $a$ , за кожного з яких система рівнянь 
$$\begin{cases} (3a - 2)x - ay = 4, \\ ax - y = a + 1 \end{cases}$$
 не має розв'язків. Якщо таке значення  $a$  єдине, то запишіть його у відповідь. Якщо таких значень  $a$  кілька, то у відповідь запишіть їх добуток.

Відповідь:

Перевірити

- 14 Знайдіть суму всіх цілих значень  $a$  з проміжку  $(-6; 6)$ , за кожного з яких система рівнянь 
$$\begin{cases} ax - 4y = a + 1, \\ 2x + (a + 6)y = a + 3 \end{cases}$$
 має єдиний розв'язок.

Відповідь:

Перевірити

- 15 Знайдіть усі значення  $a$ , за кожного з яких система рівнянь 
$$\begin{cases} (a - 2)x + y = (a - 2)^2, \\ x + (a - 2)y = 1 \end{cases}$$
 має безліч розв'язків. Якщо таке значення  $a$  єдине, то запишіть його у відповідь. Якщо таких значень  $a$  кілька, то у відповідь *найменше* з них.

Відповідь:

Перевірити

- 16 Знайдіть усі значення  $a$ , за кожного з яких система рівнянь 
$$\begin{cases} ax + 3y = a^2 + 1, \\ (3a + 14)x + (a + 8)y = 5a^2 + 5 \end{cases}$$
 не має розв'язків. Якщо таке значення  $a$  єдине, то запишіть його у відповідь. Якщо таких значень  $a$  кілька, то у відповідь *найбільше* з них.

Відповідь:

Перевірити

## САМОСТІЙНА РОБОТА №13

Завдання 1–5 мають по п'ять варіантів відповіді, з яких лише ОДИН ПРАВИЛЬНИЙ. Виберіть правильний варіант відповіді й позначте його.

- 1 Розв'яжіть систему рівнянь  $\begin{cases} 2x + ay = a + 3, \\ y - ax = 7, \end{cases}$  за  $a = -4$ .

Якщо  $(x_0; y_0)$  – розв'язок системи, то  $x_0 + y_0 =$

А	Б	В	Г	Д
1,5	3	2,5	-3	1

- 2 Знайдіть значення  $a$ , за якого система рівнянь  $\begin{cases} 2x - ay = 5, \\ 4x - 6y = 5 \end{cases}$  не має розв'язків.

А	Б	В	Г	Д
-3	12	5	3	-12

- 3 Знайдіть значення  $a$ , за якого система рівнянь  $\begin{cases} 3x - 5y = 8, \\ -3x + 5y = a \end{cases}$  має безліч розв'язків.

А	Б	В	Г	Д
-1	8	2	-2	-8

- 4 Укажіть множину всіх значень  $a$ , за яких система рівнянь  $\begin{cases} 2x - y = 1, \\ ax + 2y = 6 \end{cases}$  має єдиний розв'язок.

А	Б	В	Г	Д
{4}	$(-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$	$(-4; 4)$	$(-\infty; -4) \cup (-4; +\infty)$	{-4}

У завданні 5 до кожного з трьох рядків інформації, позначених цифрами, доберіть один правильний, на Вашу думку, варіант, позначений буквою.

- 5** Задано систему рівнянь  $\begin{cases} ax + y = 2, \\ 4x + ay = -4, \end{cases}$  де  $x$  і  $y$  – змінні,  $a$  – стала.

Установіть відповідність між значенням  $a$  (1–3) та розв’язками  $(x_0; y_0)$  системи (А – Д).

Значення $a$		Розв’язок $(x_0; y_0)$ системи
1	$a = -2$	А $\left(\frac{2}{a+2}; \frac{4}{a+2}\right)$
2	$a = 2$	Б $(x_0; 2x_0 + 2)$
3	$a \in (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$	В $\left(\frac{2}{a-2}; \frac{-4}{a-2}\right)$
		Г $\emptyset$
		Д $\left(\frac{a+2}{2}; \frac{2-a}{2}\right)$

	А	Б	В	Г	Д
1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Розв’яжіть завдання 6–7. Одержані числові відповіді запишіть у спеціально відведеному місці. Відповідь записуйте лише десятковим дробом, урахувавши положення коми. Знак «мінус» записуйте перед першою цифрою числа.

- 6** Знайдіть значення  $a$ , за якого система рівнянь  $\begin{cases} ax + 18y = 6, \\ x - 6y = a + 1 \end{cases}$  має безліч розв’язків.

Відповідь:

- 7** Знайдіть добуток усіх значень  $a$ , за кожного з яких система рівнянь  $\begin{cases} (a+6)x + 2y = 16, \\ 10x + (a-2)y = a \end{cases}$  не має розв’язків.

Відповідь:

ЗАВЕРШИТИ

СКАСУВАТИ



## 2 Оцінювання розв'язків системи рівнянь залежно від параметра

Розглянемо приклади завдань на дослідження отриманого розв'язку системи рівнянь. При розв'язуванні задач формату «*знайти всі значення параметра, за яких розв'язок системи задовольняє певній умові*», важливо дотримуватись таких ключових моментів:

- 1 *запишіть умову для розв'язку*: визначте, яку саме умову повинен задовольняти розв'язок;
- 2 *знайдіть загальний розв'язок системи*: використайте відомі методи знаходження розв'язку системи та виразіть їх через параметр, щоб отримати залежність між змінними та параметром;
- 3 *проаналізуйте особливі випадки*: перевірте, чи потрібно виключити значення параметра, які можуть зробити систему невизначеною або привести до суперечностей;
- 4 *установіть умови на отриманий розв'язок*: підставте загальний розв'язок у задану умову та розв'яжіть її.
- 5 *зробіть висновок*: узагальніть отримані значення параметра, які задовольняють умову, щоб повністю відповісти на поставлене питання.

**ПРИКЛАД 1.** Знайдіть значення  $a$ , за якого розв'язком системи рівнянь

$$\begin{cases} ax - 3y = 1, \\ 2x - 4y = a^2 \end{cases} \text{ є пара } (2; -3).$$

За умовою відомо, що розв'язком системи є пара $(2; -3)$ ; це означає, що $x = 2$ та $y = -3$	$\begin{cases} a \cdot 2 - 3 \cdot (-3) = 1, \\ 2 \cdot 2 - 4 \cdot (-3) = a^2, \end{cases}$
Підставимо $x = 2$ та $y = -3$ у систему і знайдемо значення $a$	$\begin{cases} 2a + 9 = 1, \\ 4 + 12 = a^2 \end{cases}$
При $a = -4$ маємо одночасне виконання двох рівнянь системи	$a = -4$

**Відповідь:**  $-4$ . ◀

**МАТХВИЛИНКА** Укажіть проміжок, якому належить значення  $a$ , за якого

розв'язком системи рівнянь  $\begin{cases} x + ay = -1, \\ ax - y = -7 \end{cases}$  є пара  $(-3; 1)$ .

Перевірити

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -3)$	$[-3; 0)$	$[0; 3)$	$[3; 6)$	$[6; +\infty)$

**ПРИКЛАД 2.** Знайдіть найбільше значення  $a$ , за якого розв'язок  $(x_0; y_0)$

системи рівнянь  $\begin{cases} x + y = a^2 - 2a + 3, \\ 3x + 5y = 5a^2 - 10a + 7 \end{cases}$  задовольняє умову  $x_0 = y_0^2$ .

Помножимо перше рівняння системи на 5	$\begin{cases} 5x + 5y = 5a^2 - 10a + 15, \\ 3x + 5y = 5a^2 - 10a + 7 \end{cases}$
Виконаємо почленне віднімання першого і другого рівняння системи	$\begin{aligned} 2x &= 8; \\ x &= 4 \end{aligned}$
Визначимо $y$ , використовуючи перше початкове рівняння системи	$y = a^2 - 2a + 3 - x = a^2 - 2a + 3 - 4 = a^2 - 2a - 1$
Отже, $(x_0; y_0) = (4; a^2 - 2a - 1)$ – розв'язок заданої системи. Ураховуючи умову $x_0 = y_0^2$ , розв'яжемо два рівняння	$4 = (a^2 - 2a - 1)^2$ $\begin{array}{l l} a^2 - 2a - 1 = -2; & a^2 - 2a - 1 = 2; \\ a^2 - 2a + 1 = 0; & a^2 - 2a - 3 = 2; \\ a = 1 & a_1 = -1; a_2 = 3 \end{array}$
Обираємо найбільше з визначених значень параметра відповідно до умови завдання	$a_{\max} = 3$

Відповідь: 3. ◀

**МАТХВИЛИНКА** Знайдіть суму всіх значень  $a$ , за кожного з яких

розв'язок  $(x_0; y_0)$  системи рівнянь  $\begin{cases} x + y = -a^2 + 4a - 3, \\ 2x - y = a^2 - 4a \end{cases}$  задовольняє умову  $x_0 = y_0 - 2$ .

Перевірити

А	Б	В	Г	Д
1	4	5	-4	3

**ПРИКЛАД 3.** Знайдіть *найменше* ціле значення  $a$ , за якого розв'язок  $(x_0; y_0)$  системи рівнянь  $\begin{cases} x + 3y = 3, \\ 4x + 7y = a - 1 \end{cases}$  задовольняє умову  $x_0 > y_0$ .

Виразимо $x$ з першого рівняння системи	$x = 3 - 3y$
Підставимо $3 - 3y$ замість $x$ у друге рівняння системи та визначимо $y$	$4(3 - 3y) + 7y = a - 1;$ $y = \frac{13 - a}{5}$
Підставимо вираз $\frac{13 - a}{5}$ замість $y$ у вираз $3 - 3y$ , щоб визначити $x$	$x = 3 - 3 \cdot \frac{13 - a}{5} = \frac{3a - 24}{5}$
Підставляємо $x_0 = \frac{3a - 24}{5}$ та $y_0 = \frac{13 - a}{5}$ в умову $x_0 > y_0$ , щоб визначити всі значення параметра $a$	$\frac{3a - 24}{5} > \frac{13 - a}{5};$ $3a - 24 > 13 - a;$ $4a > 37;$ $a > 9,25$
Обираємо з проміжку $a \in (9,25; +\infty)$ найменше ціле значення $a$	$a_{\min} = 10$

**Відповідь:** 10. ◀

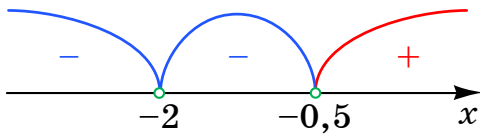
**МАТХВИЛІНКА** Знайдіть *найбільше* значення  $a$ , за якого розв'язок  $(x_0; y_0)$  системи рівнянь  $\begin{cases} x + y = a, \\ 2x - y = 3 \end{cases}$  задовольняє умову  $x_0 \geq y_0$ . Перевірити

А	Б	В	Г	Д
5	0	6	1	7

**ПРИКЛАД 4.** Знайдіть *кількість* усіх цілих значень  $a$  з проміжку  $[-8; 8]$ , за кожного з яких розв'язок  $(x_0; y_0)$  системи рівнянь  $\begin{cases} x + y = 6, \\ 2x - ay = 3 \end{cases}$  задовольняє умову  $x_0 y_0 < 0$ .

Виразимо $x$ з першого рівняння системи	$x = 6 - y$
Підставимо $6 - y$ замість $x$ у друге рівняння системи та визначимо $y$	$2(6 - y) - ay = 3;$ $12 - 2y - ay = 3;$ $(a + 2)y = 9;$ $y = \frac{9}{a + 2},$ де $a \neq -2$

Закінчення таблиці

<p>Підставимо вираз <math>\frac{9}{a+2}</math> замість <math>y</math> у вираз <math>6 - y</math>, щоб визначити <math>x</math></p>	$x = 6 - \frac{9}{a+2} = \frac{6a+3}{a+2}$
<p>Підставляємо <math>x_0 = \frac{6a+3}{a+2}</math> та <math>y_0 = \frac{9}{a+2}</math> в умову <math>x_0 y_0 &lt; 0</math>, щоб визначити всі значення параметра <math>a</math></p>	$\frac{6a+3}{a+2} \cdot \frac{9}{a+2} < 0;$ $\frac{54a+27}{(a+2)^2} < 0;$  $a \in (-\infty; -2) \cup (-2; -0,5)$
<p>Оскільки за умовою потрібно розглянути <math>a \in [-8; 8]</math>, то маємо знайти кількість усіх цілих значень <math>a \in [-8; -2) \cup (-2; -0,5)</math></p>	$\underbrace{-8, -7, -6, -5, -4, -3, -1}_{7 \text{ значень}}$

Відповідь: 7. ◀

**МАТХВИЛКА** Знайдіть *найменше* значення  $a$ , за якого розв'язок  $(x_0; y_0)$

системи рівнянь  $\begin{cases} x + y = 16, \\ x - y = 2a \end{cases}$  задовольняє умову  $\begin{cases} x_0 \geq 0, \\ y_0 \leq 0. \end{cases}$

**Перевірити**

А	Б	В	Г	Д
-8	9	7	8	-7

ПЕРЕВІРТЕ СВОЮ КОМПЕТЕНТНІСТЬ

1 Укажіть значення  $a$ , за якого розв'язок  $(x_0; y_0)$  системи рівнянь  $\begin{cases} x = a, \\ y = 5 \end{cases}$  задовольняє умову  $10x_0 = y_0$ .

Відповідь:

**Перевірити**

**Скасувати**

2 Укажіть значення  $a$ , за якого розв'язок  $(x_0; y_0)$  системи рівнянь  $\begin{cases} x = 8, \\ y = a \end{cases}$  задовольняє умову  $x_0 = y_0 + 4$ .

Відповідь:

**Перевірити**

**Скасувати**

- 3 Укажіть значення  $a$ , за якого розв'язком  $(x_0; y_0)$  системи рівнянь

$$\begin{cases} x + ay = -11, \\ ax - y = 13 \end{cases} \text{ є пара } (-5; 2).$$

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

- 4 Укажіть значення  $a$ , за якого розв'язком  $(x_0; y_0)$  системи рівнянь

$$\begin{cases} x - y = a^2, \\ ax + 2y = -19 \end{cases} \text{ є пара } (1; -8).$$

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

- 5 Знайдіть суму  $a + b$ , якщо розв'язком  $(x_0; y_0)$  системи рівнянь

$$\begin{cases} ax + y = b, \\ x - by = a \end{cases} \text{ є пара } (2; -1).$$

Відповідь:

Перевірити

- 6 Знайдіть добуток  $a \cdot b$ , якщо розв'язком  $(x_0; y_0)$  системи рівнянь

$$\begin{cases} bx - ay = -4, \\ ax + by = 18 \end{cases} \text{ є пара } (1; 4).$$

Відповідь:

Перевірити

- 7 Знайдіть значення  $a$ , за якого розв'язок  $(x_0; y_0)$  системи рівнянь

$$\begin{cases} x - 2y = 2a + 1, \\ 3x + 2y = 6a - 5 \end{cases} \text{ задовольняє умову } x_0 = -4y_0.$$

Відповідь:

Перевірити

- 8 Знайдіть значення  $a$ , за якого розв'язок  $(x_0; y_0)$  системи рівнянь

$$\begin{cases} 4x + 3y = 5a - 2, \\ 4x + y = 5a + 8 \end{cases} \text{ задовольняє умову } 2 - x_0 = y_0.$$

Відповідь:

Перевірити

- 9 Знайдіть *найбільше* ціле значення  $a$ , за якого розв'язок  $(x_0; y_0)$  системи рівнянь  $\begin{cases} 2x + y = 3a, \\ x - y = a + 1 \end{cases}$  задовольняє умову  $x_0 < y_0$ .

Відповідь:

Перевірити

- 10 Знайдіть *найбільше* ціле значення  $a$ , за якого розв'язок  $(x_0; y_0)$  системи рівнянь  $\begin{cases} 2x + 3y = 5, \\ 3x - y = 1 - 4a \end{cases}$  задовольняє умову  $x_0 + y_0 > 0$ .

Відповідь:

Перевірити

- 11 Знайдіть усі значення  $a$ , за кожного з яких розв'язок  $(x_0; y_0)$  системи рівнянь  $\begin{cases} 3x - 4y = 1, \\ x + 4y = 8a + 3 \end{cases}$  задовольняє умову  $\begin{cases} x_0 > 3, \\ y_0 < 5. \end{cases}$

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

- 12 Знайдіть усі значення  $a$ , за кожного з яких розв'язок  $(x_0; y_0)$  системи рівнянь  $\begin{cases} 3x + 4y = a - 6, \\ y - 3x = 4a - 9 \end{cases}$  задовольняє умову  $\begin{cases} x_0 < 1, \\ y_0 < 4. \end{cases}$

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

- 13 Знайдіть усі значення  $a$ , за кожного з яких розв'язок  $(x_0; y_0)$  системи рівнянь  $\begin{cases} 5x + 2y = 7a + 12, \\ 5x - 2y = 3a + 8 \end{cases}$  задовольняє умову  $\frac{x_0}{y_0} \geq 0$ .

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

- 14 Знайдіть усі значення  $a$ , за кожного з яких розв'язок  $(x_0; y_0)$  системи рівнянь  $\begin{cases} x - 4y = 2a - 18, \\ x + 3y = 9a + 3 \end{cases}$  задовольняє умову  $x_0 y_0 \leq 0$ .

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

15 Знайдіть усі значення  $a$ , за кожного з яких розв'язок  $(x_0; y_0)$  системи

$$\begin{cases} x + 2y = -2a^2 + 4a + 9, \\ 2x - 3y = 3a^2 - 6a + 4 \end{cases} \text{ задовольняє умову } x_0 - 8 = \frac{y_0}{2}. \text{ Якщо таке}$$

значення  $a$  єдине, то запишіть його у відповідь. Якщо таких значень  $a$  кілька, то у відповідь запишіть їх *добуток*.

Відповідь:

Перевірити

16 Знайдіть усі значення  $a$ , за кожного з яких розв'язок  $(x_0; y_0)$  системи

$$\begin{cases} 5x + 3y = 3a^2 - 18a + 21, \\ 4x - y = -a^2 + 6a + 10 \end{cases} \text{ задовольняє умову } x_0^2 = y_0. \text{ Якщо таке}$$

значення  $a$  єдине, то запишіть його у відповідь. Якщо таких значень  $a$  кілька, то у відповідь запишіть *найбільше* з них.

Відповідь:

Перевірити

17 Знайдіть *кількість* усіх цілих значень  $a$ , за кожного з яких розв'язок

$$(x_0; y_0) \text{ системи рівнянь } \begin{cases} x + ay = 4a^2 - 4, \\ 2x - y = 2a^2 - 3a - 8 \end{cases} \text{ задовольняє умову } x_0 \leq y_0.$$

Відповідь:

Перевірити

18 Знайдіть *кількість* усіх цілих значень  $a$ , за кожного з яких розв'язок

$$(x_0; y_0) \text{ системи рівнянь } \begin{cases} x + 3y = 3a^2 + a + 6, \\ ax - y = 6a \end{cases} \text{ задовольняє умову } x_0 \geq y_0.$$

Відповідь:

Перевірити

19 Знайдіть *суму* всіх цілих значень  $a$ , за кожного з яких розв'язок  $(x_0; y_0)$

$$\text{системи рівнянь } \begin{cases} ay - x = a + 25, \\ 2x + y = 2a^2 + a - 49 \end{cases} \text{ задовольняє умову } \begin{cases} x_0 < 0, \\ y_0 < 0. \end{cases}$$

Відповідь:

Перевірити

**20** Знайдіть *найбільше* ціле значення  $a$ , за якого розв'язок  $(x_0; y_0)$  системи

$$\text{рівнянь } \begin{cases} y - ax = 2a, \\ 2x + y = a^2 - 8 \end{cases} \text{ задовольняє умову } \begin{cases} x_0 < 0, \\ y_0 > 0. \end{cases}$$

Відповідь:

Перевірити

**21** Знайдіть *найменше* значення  $a$ , за якого розв'язок  $(x_0; y_0)$  системи рі-

$$\text{внянь } \begin{cases} x - (a + 2)y = -6, \\ x + 4y = a^2 + 7a \end{cases} \text{ задовольняє умову } x_0 y_0 \geq 0.$$

Відповідь:

Перевірити

**22** Знайдіть *найбільше* ціле значення  $a$ , за якого розв'язок  $(x_0; y_0)$  системи

$$\text{рівнянь } \begin{cases} (a + 4)x - y = a - 2a^2, \\ y - 4x = a^2 \end{cases} \text{ задовольняє умову } \frac{y_0}{x_0} \geq 0.$$

Відповідь:

Перевірити

**23** Знайдіть *кількість* усіх цілих значень  $a$ , за кожного з яких розв'язок

$$(x_0; y_0) \text{ системи рівнянь } \begin{cases} ax - (a - 4)y = a + 16, \\ x + y = 2a + 5 \end{cases} \text{ задовольняє нерівність } x_0^2 < 3x_0 + 2y_0.$$

Відповідь:

Перевірити

**24** Знайдіть *кількість* усіх цілих значень  $a$  з проміжку  $(-8; 8)$ , за кожного

$$\text{з яких розв'язок } (x_0; y_0) \text{ системи рівнянь } \begin{cases} ax + 3y = a^2 - 12, \\ x - ay = -a^2 + 5a - 3 \end{cases} \text{ задово-} \\ \text{льняє нерівність } x_0^2 + y_0^2 > 5.$$

Відповідь:

Перевірити



## САМОСТІЙНА РОБОТА №14

Завдання 1–4 мають по п'ять варіантів відповіді, з яких лише ОДИН ПРАВИЛЬНИЙ. Виберіть правильний варіант відповіді й позначте його.

- 1 Укажіть значення  $a$ , за якого розв'язок  $(x_0; y_0)$  системи рівнянь
- $$\begin{cases} x + y = a, \\ x - y = 4 \end{cases} \text{ задовольняє умову } x_0 = 2y_0.$$

А	Б	В	Г	Д
12	8	4	2	6

- 2 Укажіть добуток усіх значень  $a$ , за кожного з яких розв'язок  $(x_0; y_0)$  системи рівнянь
- $$\begin{cases} ax + y = 8, \\ x - ay = 1 \end{cases} \text{ задовольняє умову } y_0 = 2.$$

А	Б	В	Г	Д
-12	6	4	-8	-3

- 3 Укажіть множину всіх значень  $a$ , за кожного з яких розв'язок  $(x_0; y_0)$  системи рівнянь
- $$\begin{cases} x - 2y = 1 - 2a, \\ 3x + 2y = 2a + 11 \end{cases} \text{ задовольняє умову } x_0 < y_0.$$

А	Б	В	Г	Д
{2}	(2; +∞)	(-2; +∞)	(-∞; 2)	(-∞; -2)

- 4 Укажіть найбільше значення  $a$ , за якого розв'язок  $(x_0; y_0)$  системи рівнянь
- $$\begin{cases} x + 2y = 3a, \\ y - x = 6 \end{cases} \text{ задовольняє умову } x_0 y_0 \leq 0.$$

А	Б	В	Г	Д
4	-2	-1	3	5

У завданні 5 до кожного з трьох рядків інформації, позначених цифрами, доберіть один правильний, на Вашу думку, варіант, позначений буквою.

- 5** Задано систему рівнянь  $\begin{cases} x - 2y = 10, \\ 3x + 4y = 10a, \end{cases}$  де  $x$  і  $y$  – змінні,  $a$  – стала.

Установіть відповідність між умовою для розв'язку  $(x_0; y_0)$  заданої системи рівнянь (1–3) та значенням  $a$  (А – Д).

	Умова для $(x_0; y_0)$	Значення $a$																									
<b>1</b>	$x_0 > y_0$	<b>А</b> $(-\infty; -2)$	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th></th> <th>А</th> <th>Б</th> <th>В</th> <th>Г</th> <th>Д</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <th>1</th> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> </tr> <tr> <th>2</th> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> </tr> <tr> <th>3</th> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> </tr> </tbody> </table>		А	Б	В	Г	Д	1						2						3					
	А	Б		В	Г	Д																					
1																											
2																											
3																											
<b>2</b>	$\begin{cases} x_0 > 0, \\ y_0 < 0 \end{cases}$	<b>Б</b> $(3; +\infty)$ <b>В</b> $(-7; +\infty)$																									
<b>3</b>	$\frac{x_0}{y_0} > 0$	<b>Г</b> $(-2; 3)$ <b>Д</b> $(-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$																									

Розв'яжіть завдання 6–7. Одержані числові відповіді запишіть у спеціально відведеному місці. Відповідь записуйте лише десятковим дробом, урахувавши положення коми. Знак «мінус» записуйте перед першою цифрою числа.

- 6** Знайдіть добуток усіх значень  $a$ , за кожного з яких розв'язок  $(x_0; y_0)$  системи рівнянь  $\begin{cases} ay - 16x = 32, \\ x + y = a + 14 \end{cases}$  задовольняє умову  $x_0^2 = y_0$ .

Відповідь:

- 7** Знайдіть найменше значення  $a$ , за якого розв'язок  $(x_0; y_0)$  системи рівнянь  $\begin{cases} x - 2y = (a - 2)^2 + 2, \\ 2x - ay = 3a \end{cases}$  задовольняє нерівність  $x_0 + y_0 \leq 0$ .

Відповідь:

**ЗАВЕРШИТИ**

**СКАСУВАТИ**

### 3 ЛІНІЙНІ НЕРІВНОСТІ ТА ЇХ СИСТЕМИ З ПАРАМЕТРАМИ

Лінійні нерівності та системи лінійних нерівностей з параметрами є наступною складовою вивчення задач з параметрами. Лінійні нерівності описують множини можливих значень змінних, які задовольняють певні умови, і формують основи для аналізу складніших математичних концепцій. Дослідження систем лінійних нерівностей з параметрами дозволяє глибше зрозуміти, як зміна параметрів впливає на їх вирішення. Розв'язування цих задач гарно розвиває логічне мислення.

#### ПРИГАДАЙТЕ

**Лінійні нерівності з однією змінною** – це нерівності виду  $ax \geq b$ , де  $x$  – змінна,  $a$  і  $b$  – деякі числа,  $\geq$  – один із знаків  $>$ ,  $<$ ,  $\geq$ ,  $\leq$ .

Розв'язки нерівності  $ax > b$  залежно від значень  $a$  і  $b$ :

- 1 якщо  $a > 0$ , то  $x > \frac{b}{a}$ ;
- 2 якщо  $a < 0$ , то  $x < \frac{b}{a}$ ;
- 3 якщо  $a = 0$  і  $b \geq 0$ , то  $x \in \emptyset$ ;
- 4 якщо  $a = 0$  і  $b < 0$ , то  $x \in \mathbf{R}$ .

#### 1 Лінійні нерівності з параметрами

Лінійні нерівності з параметром є розширенням звичайних лінійних нерівностей, де деякі коефіцієнти виражені через параметр. Такі задачі вимагають визначити, при яких значеннях параметра нерівність має розв'язок або задані властивості розв'язків. Для успішного розв'язання подібних задач потрібно застосовувати алгоритм, що враховує як загальні правила роботи з нерівностями, так й особливості роботи з параметрами.

- 1 *запишіть нерівність у стандартному вигляді*: подайте нерівність у вигляді  $ax \geq b$ , де  $x$  – змінна,  $a$  і  $b$  – параметри,  $\geq$  – один із знаків  $>$ ,  $<$ ,  $\geq$ ,  $\leq$ ;
- 2 *проаналізуйте особливі випадки параметра*: проаналізуйте випадки, коли  $a = 0$ ;
- 3 *розгляньте всі інші випадки*: виразіть  $x$ , окремо розглядаючи випадки  $a < 0$  і  $a > 0$ ;
- 4 *виконайте умови завдання*: залежно від поставленого питання знайдіть ті значення параметра, які задовольняють умові.
- 5 *перевірте результат*: після отримання значень параметра та інтервалів для змінної перевірте, чи всі умови завдання виконано.

**ПРИКЛАД 1.** Укажіть множину всіх значень  $a$ , за кожного з яких нерівність  $ax < -2$  має хоча б один розв'язок.

Розглянемо випадок, коли $a = 0$	$0x < -2$ – неправда $x \in \emptyset$	
Розглянемо випадок, коли $a \neq 0$ : 1. якщо $a < 0$ , то при діленні обох частин нерівності на $a$ знак нерівності змінюється на протилежний; 2. якщо $a > 0$ , то при діленні обох частин нерівності на $a$ знак нерівності змінюється не змінюється;	Якщо $a < 0$ , то: $x > -\frac{2}{a};$ $x \in \left(-\frac{2}{a}; +\infty\right)$	Якщо $a > 0$ , то: $x < -\frac{2}{a};$ $x \in \left(-\infty; -\frac{2}{a}\right)$
Робимо висновок	При $a \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ задана нерівність має розв'язки	

Відповідь:  $a \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ . ◀

**МАТХВИЛІНКА** Якщо  $a < 4$  і  $(a - 4)x \geq a + 4$ , то

Перевірити

А	Б	В	Г	Д
$x \geq \frac{a+4}{a-4}$	$x \geq \frac{a-4}{a+4}$	$x \geq 8$	$x \leq \frac{a+4}{a-4}$	$x \leq \frac{a-4}{a+4}$

**ПРИКЛАД 2.** Знайдіть значення  $a$ , за якого розв'язком нерівності  $ax - 4 < 6x + a$  є будь-яке дійсне число.

Зведемо нерівність до загального вигляду лінійної нерівності	$ax - 4 < 6x + a;$ $ax - 6x < a + 4;$ $(a - 6)x < a + 4$
Визначимо, за якого значення $a$ дужка $(a - 6)$ перетворюється в 0	$a - 6 = 0;$ $a = 6$
Розглянемо, якого вигляду набуде нерівність, якщо $a = 6$	Якщо $a = 6$ , то: $(6 - 6)x < 6 + 4;$ $0x < 10$ – правильна нерівність;
Отже, при $a = 6$ маємо правильну нерівність, тому розв'язком нерівності є будь-яке дійсне число	$x \in \mathbf{R}$

Відповідь: 6. ◀

**МАТХВИЛКА**

Знайдіть значення  $a$ , за якого нерівність  $3x - a > 4 - ax$  не має розв'язків.

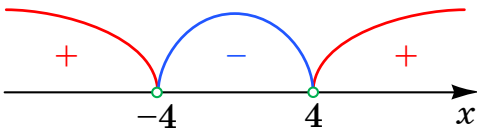
Перевірити

А	Б	В	Г	Д
3	-2	-3	0	2

**ПРИКЛАД 3.** Для нерівності  $\frac{a^2x - 16}{4} \geq 4x + a$  знайдіть усі значення  $a$ ,

за кожного з яких:

- 1) нерівність не має розв'язків;
- 2) розв'язком нерівності є будь-яке дійсне число;
- 3) розв'язком нерівності є числовий промінь.

Зведемо нерівність до загального вигляду лінійної нерівності	$\frac{a^2x - 16}{4} \geq 4x + a;$ $a^2x - 16 \geq 16x + 4a;$ $a^2x - 16x \geq 4a + 16;$ $(a^2 - 16)x \geq 4a + 16$	
Визначимо, за якого значення $a$ дужка $(a^2 - 16)$ перетворюється в 0	$a^2 - 16 = 0;$ $a = \pm 4$	
Розглянемо, якого вигляду набуде нерівність, якщо $a = -4$ та $a = 4$	Якщо $a = -4$ , то: $0x \geq 0$ – правда	Якщо $a = 4$ , то: $0x \geq 32$ – неправда
Робимо висновок	$x \in \mathbf{R}$	$x \in \emptyset$
Розглянемо випадок $a^2 - 16 < 0$ . Тоді при діленні обох частин нерівності на $a^2 - 16$ знак нерівності <b>зміниться на протилежний</b>	Розв'яжемо нерівність: $a^2 - 16 < 0;$ $(a - 4)(a + 4) < 0;$  $a \in (-4; 4)$	
	Якщо $a \in (-4; 4)$ , то: $x \leq \frac{4a + 16}{a^2 - 16}, \text{ або } x \leq \frac{4}{a - 4}$	
Розглянемо випадок $a^2 - 16 > 0$ . Тоді при діленні обох частин нерівності на $a^2 - 16$ знак нерівності <b>не зміниться</b>	Якщо $a \in (-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$ , то: $x \geq \frac{4a + 16}{a^2 - 16}, \text{ або } x \geq \frac{4}{a - 4}$	

Відповідь: 1)  $a = 4$ ; 2)  $a = -4$ ; 3)  $a \in (-\infty; -4) \cup (-4; 4) \cup (4; +\infty)$ . ◀

**МАТХВИЛИНКА** Задано нерівність  $(a^2 - 2a - 8)x < a^2 - 4$ , де  $x$  – змінна,  $a$  – стала. Установіть відповідність між значенням  $a$  (1–4) та розв’язком нерівності (А – Д).

Перевірити

- Значення  $a$**
- 1  $a \in (-\infty; -2) \cup (4; +\infty)$
- 2  $a = -2$
- 3  $a \in (-2; 4)$
- 4  $a = 4$

- Розв’язок нерівності**
- А  $x \in \mathbf{R}$
- Б  $x \in \left(-\infty; \frac{a+2}{a+4}\right)$
- В  $x \in \left(\frac{a-2}{a-4}; +\infty\right)$
- Г  $x \in \left(-\infty; \frac{a-2}{a-4}\right)$
- Д  $x \in \emptyset$

	А	Б	В	Г	Д
1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**ПРИКЛАД 4.** Знайдіть усі значення  $a$ , за кожного з яких розв’язком нерівності  $\frac{ax+2}{2} \geq \frac{a^2-2x}{3}$  є проміжок  $(-\infty; 3]$ .

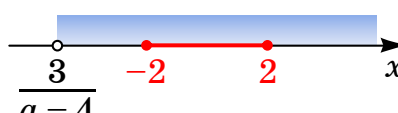
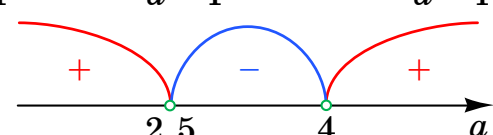
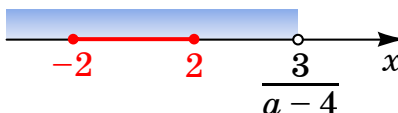
Зведемо нерівність до загального вигляду лінійної нерівності	$\frac{ax+2}{2} \geq \frac{a^2-2x}{3};$ $3(ax+2) \geq 2(a^2-2x);$ $3ax+6 \geq 2a^2-4x;$ $3ax+4x \geq 2a^2-6;$ $(3a+4)x \geq 2a^2-6$
Розглянемо випадок, коли дужка $(3a+4)$ дорівнює нулю	$3a+4=0, \text{ якщо } a=-\frac{4}{3}.$ <p>Тоді при <math>a=-\frac{4}{3}</math> маємо:</p> $0x \geq -\frac{22}{9} \Rightarrow x \in \mathbf{R}$
Оскільки за умовою треба знайти всі такі $a$ , за яких $x \in (-\infty; 3]$ , тобто $x \leq 3$ , то маємо розглянути $3a+4 < 0$ , щоб при знаходженні $x$ змінити знак початкової нерівності на протилежний	<p>Якщо <math>a &lt; -\frac{4}{3}</math>, то <math>x \leq \frac{2a^2-6}{3a+4}</math>.</p> $x \in \left(-\infty; \frac{2a^2-6}{3a+4}\right]$
Складемо рівняння і розв’яжемо його для визначення значень параметра, урахувавши те, що розглядаються $a < -\frac{4}{3}$	$\frac{2a^2-6}{3a+4} = 3;$ $2a^2-9a-18=0;$ $a_1 = -1,5 - \text{задовольняє умову};$ $a_2 = 6 - \text{не задовольняє умові}$

Відповідь:  $-1,5$ . ◀

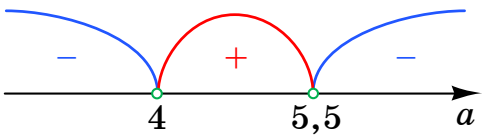
**МАТХВИЛКА** Знайдіть значення  $a$ , за якого розв'язком нерівності  $ax < a + 4$  є проміжок  $(-\infty; 2)$ . Перевірити

А	Б	В	Г	Д
3	1	2	-1	4

**ПРИКЛАД 5.** Знайдіть суму всіх цілих значень  $a$ , за кожного з яких розв'язок нерівності  $\frac{ax + 1}{4} < x + 1$  містить проміжок  $[-2; 2]$ .

<p>Зведемо нерівність до загального вигляду лінійної нерівності</p>	$\frac{ax + 1}{4} < x + 1;$ $ax + 1 < 4x + 4;$ $ax - 4x < 3;$ $(a - 4)x < 3$
<p><b>1</b> Розглянемо випадок, коли дужка <math>(a - 4)</math> дорівнює нулю. Робимо висновок.</p>	<p><math>a - 4 = 0</math>, якщо <math>a = 4</math>. Тоді при <math>a = 4</math> маємо: <math>0x &lt; 3 \Rightarrow x \in \mathbf{R}</math> Таким чином, якщо <math>a = 4</math>, то <math>[-2; 2]</math> міститься в розв'язку <math>x \in \mathbf{R}</math></p>
<p><b>2</b> Розглянемо випадок, коли <math>a - 4 &lt; 0</math></p> <p>Щоб проміжок <math>[-2; 2]</math> <b>повністю</b> містився в отриманому розв'язку, потрібно, щоб <math>\frac{3}{a - 4}</math> на осі <math>x</math> знаходилося лівіше від <math>-2</math></p>	<p>Якщо <math>a &lt; 4</math>, то <math>x &gt; \frac{3}{a - 4}</math>.</p> 
<p>Складемо і розв'яжемо отриману нерівність, урахувавши, що <math>a &lt; 4</math></p>	$\frac{3}{a - 4} < -2; \quad \frac{3}{a - 4} + 2 < 0; \quad \frac{2a - 5}{a - 4} < 0$  <p style="text-align: center;"><math>a \in (2,5; 4)</math></p>
<p><b>3</b> Розглянемо випадок, коли <math>a - 4 &gt; 0</math></p> <p>Щоб проміжок <math>[-2; 2]</math> <b>повністю</b> містився в отриманому розв'язку, потрібно, щоб <math>\frac{3}{a - 4}</math> на осі <math>x</math> знаходилося правіше від <math>2</math></p>	<p>Якщо <math>a &gt; 4</math>, то <math>x &lt; \frac{3}{a - 4}</math>.</p> 

## Закінчення таблиці

Складемо і розв'яжемо отриману нерівність, урахувуючи, що $a > 4$	$\frac{3}{a-4} > 2; \quad \frac{3}{a-4} - 2 > 0; \quad \frac{11-2a}{a-4} > 0$  $a \in (4; 5,5)$
Об'єднаємо всі отримані значення параметра	$a \in (2; 5,5)$
Знайдемо суму всіх цілих значень $a$ з проміжку $(2; 5,5)$	$3 + 4 + 5 = 12$

Відповідь: 12. ◀

**МАТХВИЛІНКА** Знайдіть множину всіх значень  $a$ , за кожного з яких розв'язок нерівності  $ax \geq 6$  містить проміжок  $(1; 3)$ . Перевірити

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 0) \cup (0; 2] \cup [6; +\infty)$	$[6; +\infty)$	$(0; +\infty)$	$(0; 2]$	$(0; 2] \cup [6; +\infty)$

## ПЕРЕВІРТЕ СВОЮ КОМПЕТЕНТНІСТЬ

1 Укажіть лінійні нерівності з параметром  $a$ . Перевірити

$$ax = 2a - 1;$$

$$2x - a > 4 - ax;$$

$$x + 3 < a;$$

$$\frac{x-a}{x+2} < 0;$$

$$x^2 + (a-4)x - 4a \geq 0;$$

$$\frac{x-3a}{2} \leq \frac{ax-2}{3}.$$

2 Розв'яжіть нерівність  $ax < 8$ , якщо  $a = -2$ .

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

3 Розв'яжіть нерівність  $a - x < 9$ , якщо  $a = 3$ .

Відповідь:

Перевірити

Скасувати



4 Розв'яжіть нерівність  $ax > -4$ , якщо  $a = 0$ .

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

5 Розв'яжіть нерівність  $(a + 1)x < a - 1$ , якщо  $a = -1$ .

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

6 Знайдіть значення  $a$ , за якого розв'язком нерівності  $x \geq a$  є проміжок  $[-3; +\infty)$ .

Відповідь:

Перевірити

7 Знайдіть значення  $a$ , за якого розв'язком нерівності  $x \leq a$  є проміжок  $(-\infty; 7]$ .

Відповідь:

Перевірити

8 Знайдіть значення  $a$ , за якого нерівність  $ax + 4 < 0$  не має розв'язків.

Відповідь:

Перевірити

9 Знайдіть значення  $a$ , за якого розв'язком нерівності  $ax > 2a - 1$  є будь-яке дійсне число.

Відповідь:

Перевірити

10 Знайдіть значення  $a$ , за якого нерівність  $(a - 4)x \geq a - 3$  не має розв'язків.

Відповідь:

Перевірити

11 Знайдіть значення  $a$ , за якого розв'язком нерівності  $(a + 2)x \leq 4a + 8$  є будь-яке дійсне число.

Відповідь:

Перевірити

- 12** Знайдіть значення  $a$ , за якого нерівність  $ax - 6 > 2a - 3x$  не має розв'язків.

*Відповідь:*

Перевірити

- 13** Знайдіть значення  $a$ , за якого розв'язком нерівності  $2ax - 1 < x + a$  є будь-яке дійсне число.

*Відповідь:*

Перевірити

- 14** Знайдіть *добуток* усіх значень  $a$ , за кожного з яких розв'язком нерівності  $x > a^2 - 4$  є проміжок  $(5; +\infty)$ .

*Відповідь:*

Перевірити

- 15** Знайдіть *суму* всіх значень  $a$ , за кожного з яких розв'язком нерівності  $x < a^2 + 2a$  є проміжок  $(-\infty; 3)$ .

*Відповідь:*

Перевірити

- 16** Знайдіть значення  $a$ , за кожного з яких розв'язком нерівності  $(a - 5)x \leq a + 1$  є проміжок  $(-\infty; 4]$ .

*Відповідь:*

Перевірити

- 17** Знайдіть значення  $a$ , за кожного з яких розв'язком нерівності  $(a + 3)x \geq a + 2$  є проміжок  $[-1; +\infty)$ .

*Відповідь:*

Перевірити

- 18** Знайдіть *добуток* усіх значень  $a$ , за кожного з яких нерівність  $(x + 1)a^2 - 3(3x + 4) > a$  не має розв'язків.

*Відповідь:*

Перевірити

- 19 Знайдіть суму всіх значень  $a$ , за кожного з яких розв'язком нерівності  $(x - 1)a^2 - (4x - 3)a + 3x \geq 0$  є будь-яке дійсне число.

Відповідь:

Перевірити

- 20 Знайдіть усі значення  $a$ , за кожного з яких розв'язком нерівності  $\frac{2ax - a}{3} < \frac{a^2 + x}{2}$  є проміжок  $(-8; +\infty)$ . Якщо таке значення  $a$  єдине, запишіть його у відповідь. Якщо таких значень  $a$  кілька, то у відповідь запишіть їх добуток.

Відповідь:

Перевірити

- 21 Знайдіть усі значення  $a$ , за кожного з яких розв'язком нерівності  $\frac{a^2x + 1}{2} > a + 2x$  є проміжок  $(-\infty; 1)$ . Якщо таке значення  $a$  єдине, запишіть його у відповідь. Якщо таких значень  $a$  кілька, то у відповідь запишіть найбільше з них.

Відповідь:

Перевірити

- 22 Знайдіть найбільше ціле значення  $a$ , за якого розв'язок нерівності  $x - a > \frac{3 - ax}{2}$  містить проміжок  $[-1; 1]$ .

Відповідь:

Перевірити

- 23 Знайдіть найменше ціле значення  $a$ , за якого розв'язок нерівності  $\frac{ax + 4}{5} \leq \frac{2x + a}{2}$  містить проміжок  $(-6; 2)$ .

Відповідь:

Перевірити

## САМОСТІЙНА РОБОТА №15

Завдання 1–4 мають по п'ять варіантів відповіді, з яких лише ОДИН ПРАВИЛЬНИЙ. Виберіть правильний варіант відповіді й позначте його.

1 Розв'яжіть нерівність  $2x - a < ax + 6$ , якщо  $a = 4$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -1)$	$(-\infty; +\infty)$	$(-5; +\infty)$	$\emptyset$	$(-\infty; -5)$

2 Знайдіть значення  $a$ , за якого нерівність  $(a - 2)x > a + 5$  не має розв'язків.

А	Б	В	Г	Д
-5	2	5	0	-2

3 Укажіть проміжок, якому належить значення  $a$ , за якого розв'язком нерівності  $(2a + 5)x < a + 3$  є будь-яке дійсне число.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -3)$	$[-3; -1)$	$[-1; 1)$	$[1; 3)$	$[3; +\infty)$

4 Знайдіть *найменше* значення  $a$ , за якого розв'язком нерівності  $x \geq a^2 + a - 2$  є проміжок  $[4; +\infty)$ .

А	Б	В	Г	Д
-3	-6	-2	-1	2

У завданні 5 до кожного з трьох рядків інформації, позначених цифрами, доберіть один правильний, на Вашу думку, варіант, позначений буквою.

- 5 Задано нерівність  $\frac{ax + 9}{5} > \frac{3x + a}{3}$ , де  $x$  – змінна,  $a$  – стала. Установіть відповідність між значенням  $a$  (1–3) та розв’язком нерівності (А – Д).

Значення $a$	Розв’язок нерівності
1 $a = 5$	А $(-\infty; +\infty)$
2 $a \in (-\infty; 5)$	Б $\left(-\infty; \frac{5a - 27}{3a - 15}\right)$
3 $a \in (5; +\infty)$	В $\emptyset$
	Г $(0; +\infty)$
	Д $\left(\frac{5a - 27}{3a - 15}; +\infty\right)$

	А	Б	В	Г	Д
1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Розв’яжіть завдання 6–7. Одержані числові відповіді запишіть у спеціально відведеному місці. Відповідь записуйте лише десятковим дробом, урахувавши положення коми. Знак «мінус» записуйте перед першою цифрою числа.

- 6 Знайдіть значення  $a$ , за якого проміжок  $(-\infty; -2)$  є розв’язком нерівності  $(a^2 + 2a - 3)x > a + 3$ .

Відповідь:

- 7 Знайдіть кількість усіх цілих значень  $a$  з проміжку  $(-10; 10)$ , за кожного з яких розв’язок нерівності  $ax + 16 \leq a^2 - 4x$  містить проміжок  $[-3; 3]$ .

Відповідь:

ЗАВЕРШИТИ

СКАСУВАТИ


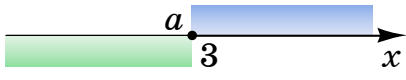
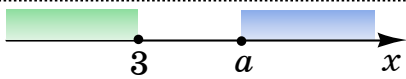
## 2 Системи лінійних нерівностей з параметрами

Розглянемо різні приклади розв'язання систем лінійних нерівностей з параметром: від найпростіших до складних. Для розв'язання таких систем потрібно розглядати різноманітні випадки розташування параметра на числовій осі. Для розв'язання лінійних нерівностей з параметром потрібно застосовувати алгоритм, що враховує загальні правила роботи із системами нерівностей та особливості роботи з параметрами.

- 1 *запишіть систему нерівностей з параметром*: переконайтеся, що всі нерівності записані в стандартному вигляді;
- 2 *дослідіть особливі значення параметра*: проаналізуйте випадки, коли коефіцієнт біля змінної кожної нерівності системи дорівнює 0 та знайдіть перетин отриманих розв'язків;
- 3 *розгляньте всі інші випадки*: кожну нерівність системи розв'яжіть для всіх можливих випадків значень параметра;
- 4 *знайдіть перетин розв'язків системи*: для кожного діапазону значень параметра визначте спільні розв'язки системи нерівностей.
- 5 *запишіть остаточний результат*: об'єднайте отримані розв'язки для різних діапазонів значень параметра.

**ПРИКЛАД 1.** Знайдіть найбільше значення  $a$ , за якого система нерівностей

$$\begin{cases} x \leq 3, \\ x \geq a \end{cases} \text{ має хоча б один розв'язок.}$$

Розглянемо випадок, коли $a$ знаходиться лівіше від числа 3	 <p>Якщо <math>a &lt; 3</math>, то <math>x \in [a; 3]</math></p>
Розглянемо випадок, коли $a = 3$	 <p>Якщо <math>a = 3</math>, то <math>x \in \{3\}</math></p>
Розглянемо випадок, коли $a$ знаходиться правіше від числа 3	 <p>Якщо <math>a &gt; 3</math>, то <math>x \in \emptyset</math></p>
Робимо висновок. Визначаємо відповідь відповідно до умови завдання	При $a \in (-\infty; 3]$ задана нерівність має хоча б один розв'язок, причому $a_{\max} = 3$

Відповідь: 3. ◀

**МАТХВИЛІНКА**


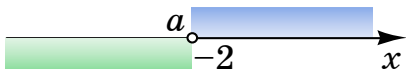
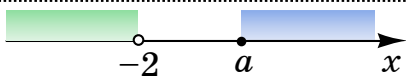
Знайдіть *найменше* ціле значення  $a$ , за якого система нерівностей  $\begin{cases} x < a, \\ x > 5 \end{cases}$  має хоча б один розв'язок.

Перевірити

А	Б	В	Г	Д
4	3	5	0	6

**ПРИКЛАД 2.** Знайдіть *найменше* значення  $a$ , за якого система нерівностей

$\begin{cases} x \geq a, \\ x < -2 \end{cases}$  не має розв'язків.

Розглянемо випадок, коли $a$ знаходиться лівіше від числа $-2$	 <p>Якщо <math>a &lt; -2</math>, то <math>x \in [a; -2)</math></p>
Розглянемо випадок, коли $a = -2$	 <p>Якщо <math>a = -2</math>, то <math>x \in \emptyset</math></p>
Розглянемо випадок, коли $a$ знаходиться правіше від числа $-2$	 <p>Якщо <math>a &gt; -2</math>, то <math>x \in \emptyset</math></p>
Робимо висновок. Визначаємо відповідь відповідно до умови завдання	При $a \in [-2; +\infty)$ задана нерівність не має розв'язків, причому $a_{\min} = -2$

Відповідь:  $-2$ . ◀

**МАТХВИЛІНКА**

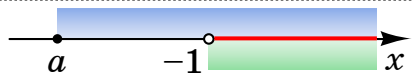
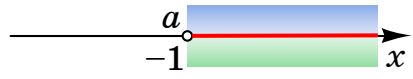
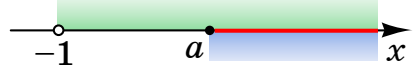
Знайдіть *найбільше* ціле значення  $a$ , за якого система нерівностей  $\begin{cases} x \geq 7, \\ x \leq a \end{cases}$  не має розв'язків.

Перевірити

А	Б	В	Г	Д
8	7	6	5	4

Це були найпростіші системи лінійних нерівностей з параметром, де потрібно лише досліджувати значення параметра. Розглянемо приклади завдань, які стосуються знаходження значень параметра, за якого виконується певна умова.

**ПРИКЛАД 3.** Знайдіть *найбільше* значення  $a$ , за якого множиною розв'язків системи нерівностей  $\begin{cases} x > -1, \\ x \geq a \end{cases}$  є проміжок  $(-1; +\infty)$ .

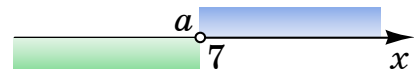
Розглянемо випадок, коли $a$ знаходиться лівіше від числа $-1$	 Якщо $a < -1$ , то $x \in (-1; +\infty)$
Розглянемо випадок, коли $a = -1$	 Якщо $a = -1$ , то $x \in (-1; +\infty)$
Розглянемо випадок, коли $a$ знаходиться правіше від числа $-1$	 Якщо $a > -1$ , то $x \in [a; +\infty)$
Робимо висновок. Визначаємо відповідь відповідно до умови завдання	При $a \in (-\infty; -1]$ множиною розв'язків заданої нерівності є проміжок $(-1; +\infty)$ , причому $a_{\max} = -1$

Відповідь:  $-2$ . ◀

**МАТХВИЛИНКА** Знайдіть значення  $a$ , за якого множиною розв'язків системи нерівностей  $\begin{cases} x \leq 5, \\ x < a \end{cases}$  є проміжок  $(-\infty; -2)$ . Перевірити

А	Б	В	Г	Д
$-3$	$4$	$-1$	$-2$	$5$

**ПРИКЛАД 4.** Знайдіть множину всіх значень  $a$ , за кожного з яких множина розв'язків системи нерівностей  $\begin{cases} x \geq 7, \\ x < a \end{cases}$  містить чотири цілих числа.

Розглянемо випадок, коли $a$ знаходиться лівіше від числа $7$	 Якщо $a < 7$ , то $x \in \emptyset$
Розглянемо випадок, коли $a = 7$	 Якщо $a = 7$ , то $x \in \emptyset$
Розглянемо випадок, коли $a$ знаходиться правіше від числа $7$	 Якщо $a > 7$ , то $x \in [7; a)$



Закінчення таблиці

Робимо висновок. Визначаємо відповідь відповідно до умови завдання	<p>Якщо <math>a \in (7; +\infty)</math>, то <math>x \in [7; a)</math></p> <p>Щоб нерівність мала чотири цілих розв'язки, тобто 7, 8, 9 та 10, то <math>10 &lt; a \leq 11</math>, або <math>a \in (10; 11]</math></p>
--	--

Відповідь:  $a \in (10; 11]$ . ◀

**МАТХВИЛІНКА**

Знайдіть множину всіх значень  $a$ , за кожного з яких множина розв'язків системи нерівностей  $\begin{cases} x < 9, \\ x > a \end{cases}$  містить рівно три цілих числа.

Перевірити

А	Б	В	Г	Д
[5; 6)	(9; 12]	[4; 5)	[9; 12)	(5; 6]

**ПРИКЛАД 5.** Знайдіть множину всіх значень  $a$ , за кожного з яких най-

меншим цілим розв'язком системи нерівностей  $\begin{cases} x > a, \\ x \geq 6 \end{cases}$  є число 9.

Розглянемо випадок, коли $a$ знаходиться лівіше від числа 6	 <p>Якщо <math>a &lt; 6</math>, то <math>x \in [6; +\infty)</math></p>
Розглянемо випадок, коли $a = 6$	 <p>Якщо <math>a = 6</math>, то <math>x \in (6; +\infty)</math></p>
Розглянемо випадок, коли $a$ знаходиться правіше від числа 6	 <p>Якщо <math>a &gt; 6</math>, то <math>x \in (a; +\infty)</math></p>
Робимо висновок на прикладах. Якщо $x \in (8; +\infty)$ , то $x_{\min} = 9$ . Якщо $x \in (8,1; +\infty)$ , то $x_{\min} = 9$ . Якщо $x \in (9; +\infty)$ , то $x_{\min} = 10$ .	<p>При <math>a \in [6; +\infty)</math> маємо <math>x \in (a; +\infty)</math></p> <p>Якщо найменшим цілим розв'язком системи нерівностей має бути число 9, то <math>a \in [8; 9)</math></p>

Відповідь:  $a \in [8; 9)$ . ◀

**МАТХВИЛИНКА**


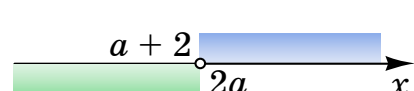
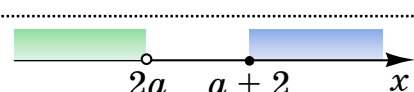
Знайдіть множину всіх значень  $a$ , за яких найбільшим цілим розв'язком системи нерівностей  $\begin{cases} x \leq 4, \\ x \leq a \end{cases}$  є число 3. Перевірити

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 3)$	$[3; 4)$	$(-\infty; 3]$	$\{2\}$	$(3; 4]$

Розглянемо поскладнені завдання із системами лінійних нерівностей, в кожній нерівності яких міститься параметр. Вони потребують особливої уваги, оскільки розв'язки систем розглядаються на координатній прямій, де значення параметра може суттєво змінювати положення розв'язків нерівності.

**ПРИКЛАД 6.** Знайдіть *найменше* ціле значення  $a$ , за якого система не-

рівностей  $\begin{cases} x \geq a + 2, \\ x < 2a \end{cases}$  має хоча б один розв'язок.

<p>Розглянемо випадок, коли <math>a + 2</math> знаходиться лівіше від <math>2a</math>, тобто коли <math>a + 2 &lt; 2a</math>, або <math>a &gt; 2</math></p>	 <p>Якщо <math>a &gt; 2</math>, то <math>x \in [a + 2; 2a)</math></p>
<p>Розглянемо випадок, коли <math>a + 2</math> і <math>2a</math> співпадають, тобто коли <math>a + 2 = 2a</math>, або <math>a = 2</math>. Тоді <math>a + 2 = 2a = 4</math></p>	 <p>Якщо <math>a = 2</math>, то <math>x \in \emptyset</math></p>
<p>Розглянемо випадок, коли <math>a + 2</math> знаходиться правіше від <math>2a</math>, тобто коли <math>a + 2 &gt; 2a</math>, або <math>a &lt; 2</math></p>	 <p>Якщо <math>a &lt; 2</math>, то <math>x \in \emptyset</math></p>
<p>Робимо висновок. Визначаємо відповідь відповідно до умови завдання</p>	<p>При <math>a \in (2; +\infty)</math> задана нерівність має хоча б один розв'язок, причому <math>a_{\min} = 3</math></p>

**Відповідь:** 3. ◀

**МАТХВИЛИНКА**

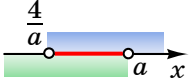
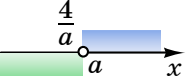
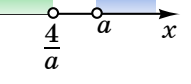
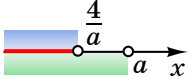
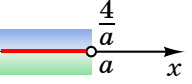
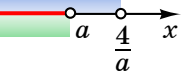
Знайдіть *найбільше* ціле значення  $a$ , за якого система нерівностей  $\begin{cases} x < a - 6, \\ x > -a \end{cases}$  не має розв'язків. Перевірити

А	Б	В	Г	Д
-1	3	6	2	0

**ПРИКЛАД 7.** Знайдіть усі значення  $a$ , за кожного з яких система нерівностей

$$\begin{cases} ax - 4 < 0, \\ x - a < 0: \end{cases}$$

- 1) не має розв'язків;
- 2) має хоча б один розв'язок.

Розв'яжемо систему нерівностей у загальному вигляді	$\begin{cases} ax < 4, \\ x < a \end{cases}$		
1 Розглянемо випадок, коли $a = 0$ . Робимо висновок.	$\begin{cases} 0x < 4, \\ x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; +\infty), \\ x \in (-\infty; 0) \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty; 0)$		
2 Розглянемо випадок, коли $a < 0$ . Робимо висновки.	Якщо $a < 0$ , то $\begin{cases} x > \frac{4}{a}, \\ x < a. \end{cases}$ Розглядаємо три можливі ситуації, ураховуючи, що $a < 0$		
	$\frac{4}{a} < a$ $a \in (-2; 0)$  $x \in \left(\frac{4}{a}; a\right)$	$\frac{4}{a} = a$ $a = -2$  $x \in \emptyset$	$\frac{4}{a} > a$ $a \in (-\infty; -2)$  $x \in \emptyset$
	Якщо $a > 0$ , то $\begin{cases} x < \frac{4}{a}, \\ x < a. \end{cases}$ Розглядаємо три можливі ситуації, ураховуючи, що $a > 0$		
3 Розглянемо випадок, коли $a > 0$ . Робимо висновки.	$\frac{4}{a} < a$ $a \in (2; +\infty)$  $x \in \left(-\infty; \frac{4}{a}\right)$	$\frac{4}{a} = a$ $a = 2$  $x \in (-\infty; 2)$	$\frac{4}{a} > a$ $a \in (0; 2)$  $x \in (-\infty; a)$
	Робимо висновок. Визначаємо відповідь відповідно до умови завдання		
	<ol style="list-style-type: none"> <li>1) Система не має розв'язків, якщо <math>a = -2</math> і <math>a \in (-\infty; -2)</math>, тобто <math>a \in (-\infty; -2]</math>.</li> <li>2) Система має хоча б один розв'язок при всіх інших значеннях <math>a</math></li> </ol>		

Відповідь: 1)  $a \in (-\infty; -2]$ ; 2)  $a \in (-2; +\infty)$ . ◀

**МАТХВИЛИНКА** Задано систему нерівностей  $\begin{cases} x < a, \\ ax \geq 1, \end{cases}$  де  $x$  – змінна,  $a$  – стала.

Установіть відповідність між значенням  $a$  (1–4) та розв'язком системи нерівностей (А – Д).

Перевірити

- Значення  $a$*
- 1  $a \in (-\infty; -1]$
- 2  $a \in (-1; 0)$
- 3  $a \in [0; 1]$
- 4  $a \in (1; +\infty)$

- Розв'язок системи нерівностей*
- А  $x \in (-\infty; a)$
- Б  $x \in \left(-\infty; \frac{1}{a}\right]$
- В  $x \in (a; +\infty)$
- Г  $x \in \left[\frac{1}{a}; a\right)$
- Д  $x \in \emptyset$

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

### ПЕРЕВІРТЕ СВОЮ КОМПЕТЕНТНІСТЬ

- 1 Розв'яжіть систему нерівностей  $\begin{cases} x > 2, \\ x > a, \end{cases}$  якщо  $a = 4$ .

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

- 2 Розв'яжіть систему нерівностей  $\begin{cases} x \geq a, \\ x < -3, \end{cases}$  якщо  $a = -5$ .

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

- 3 Розв'яжіть систему нерівностей  $\begin{cases} x < 4, \\ x > a, \end{cases}$  якщо  $a = 6$ .

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

- 4 Розв'яжіть систему нерівностей  $\begin{cases} x \geq 8, \\ x \leq a, \end{cases}$  якщо  $a = 8$ .

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

- 5** Знайдіть *найбільше* ціле значення  $a$ , за якого система нерівностей 
$$\begin{cases} x < 5, \\ x > a \end{cases}$$
 має хоча б один розв'язок.

Відповідь:

Перевірити

- 6** Знайдіть *найменше* ціле значення  $a$ , за якого система нерівностей 
$$\begin{cases} x \leq a, \\ x \geq -4 \end{cases}$$
 має хоча б один розв'язок.

Відповідь:

Перевірити

- 7** Знайдіть *найменше* ціле значення  $a$ , за якого система нерівностей 
$$\begin{cases} x \geq a, \\ x < 3 \end{cases}$$
 не має розв'язків.

Відповідь:

Перевірити

- 8** Знайдіть *найбільше* ціле значення  $a$ , за якого система нерівностей 
$$\begin{cases} x > 6, \\ x < a \end{cases}$$
 не має розв'язків.

Відповідь:

Перевірити

- 9** Знайдіть *найменше* ціле значення  $a$ , за якого множиною розв'язків системи нерівностей 
$$\begin{cases} x \leq 3, \\ x < a \end{cases}$$
 є проміжок  $(-\infty; 3]$ .

Відповідь:

Перевірити

- 10** Знайдіть значення  $a$ , за якого множиною розв'язків системи нерівностей 
$$\begin{cases} x \geq a, \\ x > 7 \end{cases}$$
 є проміжок  $[8; +\infty)$ .

Відповідь:

Перевірити

- 11** Знайдіть *ціле* значення  $a$ , за якого множина розв'язків системи нерівностей  $\begin{cases} x \geq a, \\ x \leq 3 \end{cases}$  містить шість цілих чисел.

Відповідь:

Перевірити

- 12** Знайдіть *ціле* значення  $a$ , за якого множина розв'язків системи нерівностей  $\begin{cases} x > 6, \\ x < a \end{cases}$  містить п'ять цілих чисел.

Відповідь:

Перевірити

- 13** Знайдіть *найменше* ціле значення  $a$ , за якого найбільшим цілим розв'язком системи нерівностей  $\begin{cases} x \leq 4, \\ x < a \end{cases}$  є число 4.

Відповідь:

Перевірити

- 14** Знайдіть *найбільше* ціле значення  $a$ , за якого найменшим цілим розв'язком системи нерівностей  $\begin{cases} x \geq a, \\ x > 8 \end{cases}$  є число 9.

Відповідь:

Перевірити

- 15** Знайдіть *найменше* ціле значення  $a$ , за якого система нерівностей  $\begin{cases} x > 5 - a, \\ x < 5 + a \end{cases}$  має хоча б один розв'язок.

Відповідь:

Перевірити

- 16** Знайдіть *найменше* ціле значення  $a$ , за якого система нерівностей  $\begin{cases} x < a - 4, \\ x \geq 3a + 2 \end{cases}$  не має розв'язків.

Відповідь:

Перевірити

- 17 Знайдіть *кількість* усіх цілих значень  $a$  з проміжку  $(-9; 9)$ , за кожного з яких система нерівностей  $\begin{cases} x \leq a^2 - 3, \\ x \geq 2a + 5 \end{cases}$  має хоча б один розв'язок.

Відповідь:

Перевірити

- 18 Знайдіть *кількість* усіх цілих значень  $a$  з проміжку  $[-8; 8]$ , за кожного з яких система нерівностей  $\begin{cases} x > a^2 + 1, \\ x < 5a - 3 \end{cases}$  не має розв'язків.

Відповідь:

Перевірити

- 19 Знайдіть *ціле* значення  $a$ , за якого множина розв'язків системи нерівностей  $\begin{cases} x < a + 4, \\ x > 2a \end{cases}$  містить сім цілих чисел.

Відповідь:

Перевірити

- 20 Знайдіть *ціле* значення  $a$ , за якого множина розв'язків системи нерівностей  $\begin{cases} x \leq 3a, \\ x > a - 6 \end{cases}$  містить чотири цілих числа.

Відповідь:

Перевірити

- 21 Знайдіть *ціле* значення  $a$ , за якого найбільшим цілим розв'язком системи нерівностей  $\begin{cases} x < 4 - a, \\ x < 3a \end{cases}$  є число  $-6$ .

Відповідь:

Перевірити

- 22 Знайдіть *найбільше* значення  $a$ , за якого найменшим цілим розв'язком системи нерівностей  $\begin{cases} x \geq a + 1, \\ x \geq 2a - 3 \end{cases}$  є число  $5$ .

Відповідь:

Перевірити

- 23** Знайдіть *кількість* усіх цілих значень  $a$  з проміжку  $[-7; 7]$ , за кожного з яких система нерівностей  $\begin{cases} ax - 16 \geq 0, \\ x - a < 0 \end{cases}$  має хоча б один розв'язок.

Відповідь:

Перевірити

- 24** Знайдіть *суму* всіх цілих значень  $a$ , за кожного з яких система нерівностей  $\begin{cases} x + a > 0, \\ ax + 9 < 0 \end{cases}$  не має розв'язків.

Відповідь:

Перевірити

- 25** Знайдіть *найменше* ціле значення  $a$ , за якого найбільшим цілим розв'язком системи нерівностей  $\begin{cases} x \geq 2a + 3, \\ ax \geq a^2 \end{cases}$  є число  $-6$ .

Відповідь:

Перевірити

- 26** Знайдіть *найменше* ціле значення  $a$ , за якого найменшим цілим розв'язком системи нерівностей  $\begin{cases} x < a + 9, \\ ax < 4a \end{cases}$  є число  $5$ .

Відповідь:

Перевірити



## САМОСТІЙНА РОБОТА №16

Завдання 1–5 мають по п'ять варіантів відповіді, з яких лише ОДИН ПРАВИЛЬНИЙ. Виберіть правильний варіант відповіді й позначте його.

- 1 Розв'яжіть нерівність  $\begin{cases} x > a, \\ ax < 2, \end{cases}$  якщо  $a = 0$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 0)$	$(-\infty; +\infty)$	$(0; 1)$	$(0; +\infty)$	$\emptyset$

- 2 Знайдіть множину всіх значень  $a$ , за кожного з яких система нерівностей  $\begin{cases} x > a, \\ x \leq 7 \end{cases}$  має хоча б один розв'язок.

А	Б	В	Г	Д
$(7; +\infty)$	$(-\infty; 7)$	$[7; +\infty)$	$(-\infty; 7]$	$\{7\}$

- 3 Знайдіть множину всіх значень  $a$ , за кожного з яких система нерівностей  $\begin{cases} x \leq a, \\ x > 3 \end{cases}$  не має розв'язків.

А	Б	В	Г	Д
$\{3\}$	$(-\infty; 3)$	$[3; +\infty)$	$(-\infty; 3]$	$(3; +\infty)$

- 4 Знайдіть множину всіх значень  $a$ , за кожного з яких множиною розв'язків системи нерівностей  $\begin{cases} x < -5, \\ x < a \end{cases}$  є проміжок  $(-\infty; -6)$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -6]$	$[-6; +\infty)$	$(-\infty; -6)$	$(-6; +\infty)$	$\{-6\}$

- 5 Знайдіть множину всіх значень  $a$ , за кожного з яких найменшим цілим розв'язком системи нерівностей  $\begin{cases} x > a, \\ x > 1 \end{cases}$  є число 4.

А	Б	В	Г	Д
$(3; 4]$	$[3; 4]$	$[3; 4)$	$\{3\}$	$(3; 4)$

У завданні 6 до кожного з трьох рядків інформації, позначених цифрами, доберіть один правильний, на Вашу думку, варіант, позначений буквою.

- 6 Задано нерівність  $\begin{cases} x \geq a + 2, \\ x \leq 5a - 6, \end{cases}$  де  $x$  – змінна,  $a$  – стала. Установіть відповідність між умовою (1–3) та множиною всіх значень  $a$  (А – Д), за кожного з яких ця умова виконується.

Умова

- 1 система нерівностей не має розв'язків
- 2 система нерівностей має розв'язки
- 3 розв'язок системи нерівностей складається з одного числа

Множина значень  $a$

- А  $\{1\}$
- Б  $[2; +\infty)$
- В  $(2; +\infty)$
- Г  $(-\infty; 2)$
- Д  $\{2\}$

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					

Розв'яжіть завдання 7–8. Одержані числові відповіді запишіть у спеціально відведеному місці. Відповідь записуйте лише десятковим дробом, урахувавши положення коми. Знак «мінус» записуйте перед першою цифрою числа.

- 7 Знайдіть *найменше* ціле значення  $a$ , за якого система нерівностей  $\begin{cases} ax < 6, \\ x > 3 \end{cases}$  не має розв'язків.

Відповідь:

- 8 Знайдіть *найбільше* ціле значення  $a$ , за якого система нерівностей  $\begin{cases} ax + 8a \geq 0, \\ x + 4a \leq 0 \end{cases}$  має хоча б один розв'язок.

Відповідь:

ЗАВЕРШИТИ

СКАСУВАТИ

# РОЗДІЛ 3. КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ З ПАРАМЕТРАМИ

## 1 КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ З ПАРАМЕТРАМИ

### ПРИГАДАЙТЕ

**Квадратне рівняння** – це рівняння виду  $ax^2 + bx + c = 0$ , де  $a, b, c$  – деякі числа, причому  $a \neq 0$ .

$D = b^2 - 4ac$  – дискримінант

- 1 якщо  $D > 0$ , то  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ ;
- 2 якщо  $D = 0$ , то  $x = -\frac{b}{2a}$ ;
- 3 якщо  $D < 0$ , то  $x \notin \mathbf{R}$ .

Введення параметра в квадратні рівняння та нерівності робить їх більш гнучкими інструментами для дослідження різних математичних ситуацій. Вивчення таких рівнянь та нерівностей дозволяє нам зрозуміти, як змінюються їх розв'язки при зміні значення параметра, і використовувати цю інформацію для розв'язання задач з різними умовами.

## 1 Існування коренів рівняння залежно від параметра

У цьому пункті розглядатимуться квадратні рівняння з параметрами, завданням яких є визначення кількості коренів рівняння. Такі рівняння допомагають досліджувати поведінку коренів залежно від значень параметра, що дозволяє визначити області, в яких рівняння має два корені, один корінь або не має дійсних коренів. Для цього використовують дискримінант – ключовий показник, що визначає кількість розв'язків рівняння залежно від значення параметра.

- 1 *Запишіть рівняння у стандартному вигляді:* запишіть рівняння у форматі  $ax^2 + bx + c = 0$ , де  $a, b, c$  – деякі числа або параметри.
- 2 *Розгляньте особливі випадки:* розв'яжіть рівняння, якщо  $a = 0$  (у випадку, коли  $a$  – відоме число, цей пункт пропускаємо);
- 3 *Запишіть дискримінант рівняння:*  $D = b^2 - 4ac$ .
- 4 *Проаналізуйте значення дискримінанта:* якщо  $D > 0$ , рівняння має два різних корені; якщо  $D = 0$ , рівняння має один корінь; якщо  $D < 0$ , рівняння не має дійсних коренів.
- 5 *Визначте значення параметра:* знайдіть значення параметра, розв'язавши відповідне рівняння або нерівність.

**ПРИКЛАД 1.** Знайдіть *добуток* усіх цілих значень  $a$ , за кожного з яких рівняння  $x^2 - 2ax + 16 = 0$  має лише один корінь.

Визначимо умовно коефіцієнти рівняння	$a = 1; b = -2a; c = 16$
Запишемо дискримінант рівняння	$D = b^2 - 4ac = (-2a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 4a^2 - 64$
Квадратне рівняння має лише один корінь, коли його дискримінант дорівнює 0. Отже, прирівняємо дискримінант до 0 і розв'яжемо отримане рівняння	$4a^2 - 64 = 0;$ $4a^2 = 64;$ $a^2 = 16;$ $a = \pm 4$
Отже, якщо $a = -4$ або $a = 4$ , то рівняння матиме лише один корінь. Знайдемо добуток отриманих значень параметра	$-4 \cdot 4 = -16$

**Відповідь:**  $-16$ . ◀

**МАТХВИЛІНКА** Укажіть проміжок, якому належить значення  $a$ , за якого рівняння  $x^2 - 6x - a + 4 = 0$  має лише один корінь. Перевірити

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -6)$	$[-6; -1)$	$[-1; 0)$	$[0; 1)$	$[1; +\infty)$

**ПРИКЛАД 2.** Знайдіть *найбільше* ціле значення  $a$ , за якого рівняння  $x^2 - 8x + 2a = 0$  має два дійсних корені.

Визначимо умовно коефіцієнти рівняння	$a = 1; b = -8; c = 2a$
Запишемо дискримінант рівняння	$D = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2a = 64 - 8a$
Квадратне рівняння має два корені, коли його дискримінант більший за 0. Отже, складемо і розв'яжемо нерівність	$64 - 8a > 0;$ $-8a > -64;$ $a < 8$
Отже, якщо $a \in (-\infty; 8)$ , то рівняння матиме два дійсних корені. Знайдемо найбільше ціле отриманих значень параметра	$a_{\max} = 7$

**Відповідь:**  $7$ . ◀

**МАТХВИЛИНКА** Знайдіть множину всіх цілих значень  $a$ , за кожного з яких рівняння  $x^2 - 3ax + 36 = 0$  має два дійсних корені.

Перевірити

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$	$(8; +\infty)$	$(4; +\infty)$	$(-4; 4)$	$(-\infty; -4)$

**ПРИКЛАД 3.** Знайдіть кількість усіх цілих значень  $a$ , за кожного з яких рівняння  $x^2 - (a - 3)x + 4 = 0$  не має дійсних коренів.

Визначимо умовно коефіцієнти рівняння	$a = 1; b = -(a - 3); c = 4$
Запишемо дискримінант рівняння	$D = b^2 - 4ac = (a - 3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = a^2 - 6a + 9 - 16 = a^2 - 6a - 7$
Квадратне рівняння не має дійсних, коли його дискримінант менший від 0. Отже, складемо і розв'яжемо нерівність	$a^2 - 6a - 7 < 0;$ $a^2 - 6a - 7 = 0;$ $a_1 = -1; a_2 = 7$ 
Отже, якщо $a \in (-1; 7)$ , то рівняння не матиме дійсних коренів. Знайдемо кількість усіх цілих значень параметра	$\underbrace{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6}_{7 \text{ значень}}$

Відповідь: 7. ◀

**МАТХВИЛИНКА** Знайдіть множину всіх цілих значень  $a$ , за кожного з яких рівняння  $x^2 - 2ax - 3a = 0$  не має дійсних коренів.

Перевірити

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -3)$	$(-\infty; -3) \cup (0; +\infty)$	$(-3; 0)$	$(-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$	$(0; 3)$

Особливим випадком є ситуація, коли в коефіцієнті перед  $x^2$  міститься параметр. У такому випадку обов'язково потрібно розглядати ситуацію, коли цей коефіцієнт дорівнює 0, бо тоді це рівняння перетвориться на лінійне. Потім окремо слід розглянути всі інші ситуації.

**ПРИКЛАД 4.** Знайдіть найбільше значення  $a$ , за якого рівняння  $ax^2 - (3a + 5)x + 2a + 1 = 0$  має лише один корінь.

Визначимо умовно коефіцієнти рівняння	$a = a; b = -(3a + 5); c = 2a + 1$
<b>1</b> Розглянемо випадок, коли $a = 0$ . Робимо висновок.	$0x^2 - (3 \cdot 0 + 5)x + 2 \cdot 0 + 1 = 0;$ $-5x + 1 = 0;$ $x = \frac{1}{5}$
<b>2</b> Розглянемо випадок, коли $a \neq 0$ . Знайдемо дискримінант і прирівняємо його до 0, оскільки рівняння повинно мати лише один корінь	$D = b^2 - 4ac =$ $= (3a + 5)^2 - 4 \cdot a \cdot (2a + 1) =$ $= 9a^2 + 30a + 25 - 8a^2 - 4a =$ $= a^2 + 26a + 25$
	$a^2 + 26a + 25 = 0;$ $a_1 = -25; a_2 = -1$
Отже, якщо $a = -25, a = -1$ і $a = 0$ , то рівняння матиме один корінь. Визначаємо найбільше значення параметра	$a_{\max} = 0$

Відповідь: 0. ◀

**МАТХВИЛКА** Задано рівняння  $ax^2 - 4x + a + 3 = 0$ , де  $x$  – змінна,  $a$  – стала. Установіть відповідність між кількістю дійсних коренів рівняння (1–3) та значенням  $a$  (А – Д).

Перевірити

Кількість коренів	Значення $a$
<b>1</b> лише один	<b>А</b> $(-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$
<b>2</b> лише два	<b>Б</b> $(-4; 0) \cup (0; 1)$
<b>3</b> жодного	<b>В</b> $\{-4; 0; 1\}$
	<b>Г</b> $(-4; 1)$
	<b>Д</b> $\{-4; 1\}$

	А	Б	В	Г	Д
<b>1</b>					
<b>2</b>					
<b>3</b>					

**ПЕРЕВІРТЕ СВОЮ КОМПЕТЕНТНІСТЬ**

**1** Укажіть квадратні рівняння з параметром  $a \neq 0$ .

Перевірити

$$x^2 = ax;$$

$$a^2x + ax - 4 = 0;$$

$$ax^2 + 4x = 8a;$$

$$x^2 + ax - 2a^2 = 0;$$

$$\frac{x^2 - a}{x + 2} = 0;$$

$$(x - 2)a^2 + 4x - 8 = 0.$$

2 Розв'яжіть рівняння  $x^2 = a$ , якщо  $a = 9$ .

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

3 Розв'яжіть рівняння  $ax^2 - 4x = 0$ , якщо  $a = 2$ .

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

4 Розв'яжіть рівняння  $x^2 - ax + 4 = 0$ , якщо  $a = 3$ .

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

5 Розв'яжіть рівняння  $ax^2 - ax - 2 = 0$ , якщо  $a = 0$ .

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

6 Знайдіть *найменше* ціле значення  $a$ , за якого рівняння  $x^2 = 3a - 6$  має дійсні корені.

Відповідь:

Перевірити

7 Знайдіть *найбільше* ціле значення  $a$ , за якого рівняння  $x^2 = 4a + 12$  не має дійсних коренів.

Відповідь:

Перевірити

8 Знайдіть значення  $a$ , за якого рівняння  $x^2 - 6x + a = 0$  має лише один корінь.

Відповідь:

Перевірити

9 Знайдіть значення  $a$ , за якого рівняння  $x^2 + 4x + a - 1 = 0$  має лише один корінь.

Відповідь:

Перевірити

10 Знайдіть *найбільше* ціле значення  $a$ , за якого має два дійсних корені рівняння  $x^2 - 2x + a + 7 = 0$ .

Відповідь:

Перевірити

- 11** Знайдіть *найменше* ціле значення  $a$ , за якого не має дійсних коренів рівняння  $x^2 + 5x + a - 3 = 0$ .

Відповідь:

Перевірити

- 12** Задано рівняння  $x^2 - 2ax + a + 6 = 0$ , де  $x$  – змінна,  $a$  – стала.

1. Знайдіть *добуток* усіх значень  $a$ , за яких рівняння має один корінь.

Відповідь:

Перевірити

2. Знайдіть *кількість* усіх цілих значень  $a$  з проміжку  $[-6; 6]$ , за кожного з яких рівняння має два дійсних корені.

Відповідь:

Перевірити

3. Знайдіть *суму* всіх цілих значень  $a$ , за кожного з яких рівняння не має дійсних коренів.

Відповідь:

Перевірити

- 13** Знайдіть *найменше* значення  $a$ , за якого має лише один корінь рівняння  $x^2 - (a - 2)x - 3a + 6 = 0$ .

Відповідь:

Перевірити

- 14** Знайдіть *найбільше* ціле значення  $a$ , за якого має два дійсних корені рівняння  $x^2 - ax + a^2 - 3a - 9 = 0$ .

Відповідь:

Перевірити

- 15** Знайдіть *найбільше* ціле значення  $a$ , за якого не має дійсних коренів рівняння  $x^2 + (a + 5)x + 3a + 7 = 0$ .

Відповідь:

Перевірити

- 16** Знайдіть значення  $a$ , за якого рівняння  $(a + 3)x^2 - 2ax - 4a + 1 = 0$  не є квадратним.

Відповідь:

Перевірити



- 17** Знайдіть значення  $a$ , за якого рівняння  $(a - 4)x^2 + (a + 5)x + 2a - 3 = 0$  є лінійним.

Відповідь:

Перевірити

- 18** Знайдіть значення  $a$ , за якого рівняння  $(2a + 5)x^2 - (a - 1)x + a^2 - 4 = 0$  є зведеним.

Відповідь:

Перевірити

- 19** Знайдіть добуток усіх значень  $a$ , за якого  $x^2 + (2a - 1)x + a - 6 = 0$  є неповним квадратним рівнянням.

Відповідь:

Перевірити

- 20** Знайдіть кількість усіх значень  $a$ , за кожного з яких рівняння  $ax^2 - (2a - 3)x + a - 2 = 0$  має лише один корінь.

Відповідь:

Перевірити

- 21** Знайдіть кількість усіх значень  $a$ , за кожного з яких рівняння  $ax^2 - (a + 2)x + a + 2 = 0$  має лише один корінь.

Відповідь:

Перевірити

- 22** Знайдіть найменше ціле значення  $a$ , за якого не має дійсних коренів рівняння  $ax^2 + 3x^2 - ax - 3x + 6 = 0$ .

Відповідь:

Перевірити

- 23** Знайдіть найбільше ціле значення  $a$ , якого має два дійсних корені рівняння  $2ax^2 - 4x^2 - 4x + a - 1 = 0$ .

Відповідь:

Перевірити

## САМОСТІЙНА РОБОТА №17

Завдання 1–4 мають по п'ять варіантів відповіді, з яких лише ОДИН ПРАВИЛЬНИЙ. Виберіть правильний варіант відповіді й позначте його.

1 Розв'яжіть рівняння  $x^2 + ax + a^2 - 4 = 0$ , якщо  $a = 2$ .

А	Б	В	Г	Д
-2; 0	4	-2	0; 2	0

2 Знайдіть значення  $a$ , за якого рівняння  $x^2 - 2x + a + 8 = 0$  має лише один дійсний корінь.

А	Б	В	Г	Д
6	24	-7	-8	-6

3 Знайдіть множину всіх значень  $a$ , за кожного з яких рівняння  $x^2 = 16 - 2a$  має два дійсних корені.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -8)$	$(8; +\infty)$	$(0; +\infty)$	$(-\infty; 8)$	$(-8; +\infty)$

4 Знайдіть множину всіх значень  $a$ , за кожного з яких рівняння  $x^2 + 2ax + 9 = 0$  не має дійсних коренів.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 3)$	$(-3; 3)$	$\{3\}$	$(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$	$(3; +\infty)$

У завданні 5 до кожного з трьох рядків інформації, позначених цифрами, доберіть один правильний, на Вашу думку, варіант, позначений буквою.

- 5** Задано рівняння  $ax^2 + 4ax - 8 = 0$ , де  $x$  – змінна,  $a$  – стала. Установіть відповідність між умовою (1–3) та значенням  $a$  (А – Д), за якого ця умова виконується.

<i>Умова</i>	<i>Значення <math>a</math></i>																									
1 рівняння не є квадратним	А 0	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th></th> <th>А</th> <th>Б</th> <th>В</th> <th>Г</th> <th>Д</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <th>1</th> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <th>2</th> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <th>3</th> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>		А	Б	В	Г	Д	1						2						3					
	А		Б	В	Г	Д																				
1																										
2																										
3																										
2 рівняння є зведеним квадратним рівнянням	Б 2 В 1																									
3 рівняння має лише один корінь	Г -2 Д -2; 0																									

Розв'яжіть завдання 6–7. Одержані числові відповіді запишіть у спеціально відведеному місці. Відповідь записуйте лише десятковим дробом, урахувавши положення коми. Знак «мінус» записуйте перед першою цифрою числа.

- 6** Знайдіть кількість усіх цілих значень  $a$  з проміжку  $[-9; 9]$ , за кожного з яких рівняння  $x^2 - (a + 4)x + 3a + 7 = 0$  має два дійсних корені.

*Відповідь:*

- 7** Знайдіть суму всіх цілих значень  $a$ , за кожного з яких рівняння  $x(x - 1)(a - 4) = 3$  не має дійсних коренів.

*Відповідь:*

**ЗАВЕРШИТИ**

**СКАСУВАТИ**

## 2 Оцінювання коренів рівняння залежно від параметра

Проаналізуємо типові завдання, які передбачають дослідження знайдених коренів рівняння. Для ефективного розв'язання таких задач рекомендується спочатку отримати загальні корені рівняння, а потім підставити в нього конкретні значення згідно з умовою завдання.

Алгоритм розв'язання квадратних рівнянь з параметрами, де потрібно знайти корені рівняння та дослідити їх залежно від параметра, виглядає наступним чином:

- 1 *запишіть рівняння у стандартному вигляді*: запишіть рівняння у форматі  $ax^2 + bx + c = 0$ , де  $a, b, c$  – деякі числа або параметри;
- 2 *розгляньте особливі випадки*: розв'яжіть рівняння, якщо  $a = 0$  (у випадку, коли  $a$  – відоме число, цей пункт пропускаємо);
- 3 *запишіть дискримінант рівняння*:  $D = b^2 - 4ac$ ;
- 4 *проаналізуйте значення дискримінанта*: зазвичай у завданнях на дослідження коренів рівняння дискримінант згортається у формулу квадрата суми або квадрата різниці;
- 5 *знайдіть корені рівняння*: знайдіть корені  $x_1$  і  $x_2$  за формулами:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \quad \text{і} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a};$$

- 6 *знайдіть значення параметра*: дослідіть отримані корені залежно від параметра згідно з умовами задачі та на основі досліджених коренів сформулюйте рівняння, нерівності або їх системи для параметра та розв'яжіть їх, визначаючи можливі значення параметра.

**ПРИКЛАД 1.** Знайдіть *найбільше* значення  $a$ , за якого одним із коренів рівняння  $x^2 - ax + a^2 - 2a - 5 = 0$  є число 3.


За умовою відомо, що коренем рівняння є число 3; це означає, що $x = 3$	$3^2 - 3a + a^2 - 2a - 5 = 0;$ $a^2 - 5a + 4 = 0;$
Підставимо $x = 3$ і знайдемо значення $a$	$a_1 = 1; \quad a_2 = 4$
Визначимо найбільше з отриманих значень $a$	$a_{\max} = 4$

*Відповідь:* 4. ◀

**МАТХВИЛИНКА** Укажіть проміжок, якому належить значення  $a$ , за якого одним із коренів рівняння  $x^2 - 5x + 3a = 0$  є число 2. Перевірити

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -3)$	$[-3; -1)$	$[-1; 1)$	$[1; 3)$	$[3; +\infty)$

**ПРИКЛАД 2.** Знайдіть *найменше* ціле значення  $a$ , за якого обидва корені рівняння  $x^2 - (3 - a)x - 2a^2 - 6a = 0$  є додатними.

Визначимо умовно коефіцієнти рівняння	$a = 1; b = -(3 - a); c = -2a^2 - 6a$
Запишемо дискримінант рівняння	$D = b^2 - 4ac = (3 - a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2a^2 - 6a) = 9 - 6a + a^2 + 8a^2 + 24a = 9a^2 + 18a + 9 = 9(a^2 + 2a + 1) = 9(a + 1)^2$
Знаходимо корені рівняння у загальному вигляді	$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{3 - a - \sqrt{9(a + 1)^2}}{2 \cdot 1} = \frac{3 - a - 3(a + 1)}{2} = \frac{3 - a - 3a - 3}{2} = \frac{-4a}{2} = -2a$ $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{3 - a + \sqrt{9(a + 1)^2}}{2 \cdot 1} = \frac{3 - a + 3(a + 1)}{2} = \frac{3 - a + 3a + 3}{2} = \frac{2a + 6}{2} = a + 3$
За умовою обидва корені рівняння мають бути <b>додатними</b> , тому складемо систему нерівностей	$\begin{cases} -2a > 0, \\ a + 3 > 0, \\ a < 0, \\ a > -3 \end{cases}$ <div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;">  <div style="margin-left: 20px;"> <math>a \in (-3; 0)</math> </div> </div>
Визначаємо найменше ціле значення параметра	$a_{\min} = -2$

**Відповідь:**  $-2$ . ◀

**МАТХВИЛИНКА** Знайдіть *найбільше* ціле значення  $a$ , за якого обидва корені рівняння  $x^2 - (2a - 9)x - 6a + 18 = 0$  є від'ємними. Перевірити

А	Б	В	Г	Д
-3	3	-2	4	2

**ПРИКЛАД 3.** Знайдіть *найбільше* ціле значення  $a$ , за якого один із коренів рівняння  $x^2 - (3a - 1)x + 2a^2 - 3a - 2 = 0$  менший від 2, а другий більший за 3.

Визначимо умовно коефіцієнти рівняння	$a = 1; b = -(3a - 1); c = 2a^2 - 3a - 2$	
Запишемо дискримінант рівняння	$D = b^2 - 4ac = (3a - 1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2a^2 - 3a - 2) =$ $= 9a^2 - 6a + 1 - 8a^2 + 12a + 8 =$ $= a^2 + 6a + 9 = (a + 3)^2$	
Знаходимо корені рівняння у загальному вигляді	$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{3a - 1 - \sqrt{(a + 3)^2}}{2 \cdot 1} =$ $= \frac{3a - 1 - a - 3}{2} = \frac{2a - 4}{2} = \frac{2(a - 2)}{2} = a - 2$	
	$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{3a - 1 + \sqrt{(a + 3)^2}}{2 \cdot 1} =$ $= \frac{3a - 1 + a + 3}{2} = \frac{4a + 2}{2} = \frac{2(2a + 1)}{2} = 2a + 1$	
За умовою один корінь має бути меншим від 2, а другий – більший за 3. Розглянемо два випадки	<p><i>Перший випадок</i></p> $\begin{cases} a - 2 < 2, \\ 2a + 1 > 3, \end{cases} \begin{cases} a < 4, \\ a > 1 \end{cases}$ <p><math>a \in (1; 4)</math></p>	<p><i>Другий випадок</i></p> $\begin{cases} 2a + 1 < 2, \\ a - 2 > 3, \end{cases} \begin{cases} a < 0,5, \\ a > 5 \end{cases}$ <p><math>a \in \emptyset</math></p>
	Визначаємо найбільше ціле значення параметра	$a_{\max} = 3$

**Відповідь: 3.** ◀

**МАТХВИЛІНКА** Знайдіть *найменше* ціле значення  $a$ , за якого один із коренів рівняння  $x^2 - (3a - 6)x - 12a + 8 = 0$  менший від  $-1$ , а другий більший за 4.

Перевірити

А	Б	В	Г	Д
0	1	2	3	5

Розглянемо інші питання, які стосуються дослідження знайдених коренів квадратного рівняння.

**ПРИКЛАД 4.** Знайдіть кількість усіх цілих значень  $a$ , за кожного з яких корені рівняння  $2x^2 - (6a - 1)x + 9a - 6 = 0$  належать проміжку  $[-5; 7]$ .

Визначимо умовно коефіцієнти рівняння	$a = 2; b = -(6a - 1); c = 9a - 6$
Запишемо дискримінант рівняння	$D = b^2 - 4ac = (6a - 1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (9a - 6) =$ $= 36a^2 - 12a + 1 - 72a + 48 =$ $= 36a^2 - 84a + 49 = (6a - 7)^2$
Знаходимо корені рівняння у загальному вигляді	$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{6a - 1 - \sqrt{(6a - 7)^2}}{2 \cdot 2} =$ $= \frac{6a - 1 - 6a + 7}{4} = \frac{6}{4} = 1,5$
	$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{6a - 1 + \sqrt{(6a - 7)^2}}{2 \cdot 2} =$ $= \frac{6a - 1 + 6a - 7}{4} = \frac{12a - 8}{4} = \frac{4(3a - 2)}{4} = 3a - 2$
Корінь $x_1 = 1,5$ належить проміжку $[-5; 7]$ . Визначимо, за яких значень $a$ корінь $x_2 = 3a - 2$ належить цьому проміжку	$-5 \leq 3a - 2 \leq 7;$ $-3 \leq 3a \leq 9;$ $-1 \leq a \leq 3;$ $a \in [-1; 3]$
Визначаємо кількість усіх цілих значень параметра	$\underbrace{-1; 0; 1; 2; 3}_{5 \text{ значень}}$

Відповідь: 5. ◀

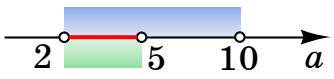
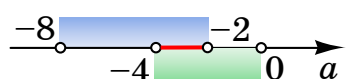
**МАТХВИЛИНКА** Знайдіть найбільше ціле значення  $a$ , за якого корені рівняння  $3x^2 - (5 - 6a)x - 10a = 0$  належать проміжку  $[-6; 2]$ . Перевірити

А	Б	В	Г	Д
3	-2	2	4	-1

**ПРИКЛАД 5.** Знайдіть добуток усіх цілих значень  $a$ , за кожного з яких один із коренів рівняння  $x^2 - (a + 2)x - 2a^2 + 4a = 0$  належить проміжку  $(-8; 0)$ , а другий – проміжку  $(4; 10)$ .

Визначимо умовно коефіцієнти рівняння	$a = 1; b = -(a + 2); c = -2a^2 + 4a$
---------------------------------------	---------------------------------------

## Закінчення таблиці

Запишемо дискримінант рівняння	$D = b^2 - 4ac = (a + 2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2a^2 + 4a) =$ $= a^2 + 4a + 4 + 8a^2 - 16a = 9a^2 - 12a + 4 =$ $= (3a - 2)^2$	
Знаходимо корені рівняння у загальному вигляді	$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{a + 2 - \sqrt{(3a - 2)^2}}{2 \cdot 1} =$ $= \frac{a + 2 - 3a + 2}{2} = \frac{4 - 2a}{2} = 2 - a$	
	$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{a + 2 + \sqrt{(3a - 2)^2}}{2 \cdot 1} =$ $= \frac{a + 2 + 3a - 2}{2} = \frac{4a}{2} = 2a$	
Розглянемо два випадки: коли перший корінь належить проміжку $(-8; 0)$ , а другий – проміжку $(4; 10)$ , і навпаки	Перший випадок	Другий випадок
	$\begin{cases} -8 < 2 - a < 0, \\ 4 < 2a < 10, \\ -10 < -a < -2, \\ 2 < a < 5, \\ 2 < a < 10, \\ 2 < a < 5, \end{cases}$  $a \in (2; 5)$	$\begin{cases} -8 < 2a < 0, \\ 4 < 2 - a < 10, \\ -4 < a < 0, \\ 2 < -a < 8, \\ -4 < a < 0, \\ -8 < a < -2, \end{cases}$  $a \in (-4; -2)$
Об'єднуємо два отриманих проміжки для $a$	$a \in (-4; -2) \cup (2; 5)$	
Визначаємо добуток усіх цілих значень параметра	$-3 \cdot 3 \cdot 4 = -36$	

Відповідь:  $-36$ . ◀

**МАТХВИЛКА** Знайдіть суму всіх цілих значень  $a$ , за кожного з яких один із коренів рівняння  $2x^2 - (2a + 3)x - a - 2 = 0$  належить проміжку  $(-2; 2)$ , а другий – проміжку  $(6; 10)$ . Перевірити

<b>А</b>	<b>Б</b>	<b>В</b>	<b>Г</b>	<b>Д</b>
30	22	-6	18	26



ПЕРЕВІРТЕ СВОЮ КОМПЕТЕНТНІСТЬ

- 1 Знайдіть значення  $a$ , за якого число 4 є одним із коренів рівняння  $x^2 - 2x + 4a = 0$ .

Відповідь:

Перевірити

- 2 Знайдіть значення  $a$ , за якого число  $-5$  є одним із коренів рівняння  $x^2 + ax - 10 = 0$ .

Відповідь:

Перевірити

- 3 Знайдіть *найменше* значення  $a$ , за якого число 2 є одним із коренів рівняння  $x^2 - (a + 6)x + a^2 = 0$ .

Відповідь:

Перевірити

- 4 Знайдіть *найбільше* значення  $a$ , за якого число  $-3$  є одним із коренів рівняння  $x^2 + (a^2 - 9)x + 3a = 0$ .

Відповідь:

Перевірити

- 5 Знайдіть *найменше* ціле значення  $a$ , за якого обидва корені рівняння  $x^2 - (a + 8)x + 5a + 15 = 0$  є додатними.

Відповідь:

Перевірити

- 6 Знайдіть *найбільше* ціле значення  $a$ , за якого обидва корені рівняння  $x^2 - (a - 10)x - a + 9 = 0$  є від'ємними.

Відповідь:

Перевірити

- 7 Знайдіть *найменше* ціле значення  $a$ , за якого обидва корені рівняння  $x^2 - (3a + 3)x + 12a - 4 = 0$  більші за 2.

Відповідь:

Перевірити

- 8 Знайдіть *найбільше* ціле значення  $a$ , за якого обидва корені рівняння  $x^2 - (2a + 4)x + 6a + 3 = 0$  менші від 5.

Відповідь:

Перевірити

- 9 Знайдіть *найменше* ціле значення  $a$ , за якого один із коренів рівняння  $x^2 - (2a - 8)x - 8a + 16 = 0$  менший від  $-3$ , а другий більший за  $6$ .

Відповідь:

Перевірити

- 10 Знайдіть *найбільше* ціле значення  $a$ , за якого один із коренів рівняння  $x^2 - (3a + 12)x + 15a + 35 = 0$  менший від  $1$ , а другий більший за  $3$ .

Відповідь:

Перевірити

- 11 Знайдіть *кількість* усіх цілих значень  $a$ , за кожного з яких обидва корені рівняння  $2x^2 - (4a + 5)x + 6a + 3 = 0$  належать проміжку  $(-4; 5)$ .

Відповідь:

Перевірити

- 12 Знайдіть *кількість* усіх цілих значень  $a$ , за кожного з яких обидва корені рівняння  $2x^2 + (4a - 1)x + 2a - 1 = 0$  належать проміжку  $[-3; 7]$ .

Відповідь:

Перевірити

- 13 Знайдіть *найменше* ціле значення  $a$ , за якого один із коренів рівняння  $3x^2 - (9a + 4)x + 12a = 0$  належить проміжку  $[-9; -3]$ , а другий – проміжку  $[1; 6]$ .

Відповідь:

Перевірити

- 14 Знайдіть *найбільше* ціле значення  $a$ , за якого один із коренів рівняння  $2x^2 - (2a - 5)x - 9a - 18 = 0$  належить проміжку  $(-7; -2)$ , а другий – проміжку  $(4; 9)$ .

Відповідь:

Перевірити

- 15 Знайдіть *кількість* усіх значень  $a$ , за кожного з яких обидва корені рівняння  $x^2 + (a - 3)x - 2a^2 - 6a = 0$  є невід'ємними.

Відповідь:

Перевірити

- 16 Знайдіть *найбільше* ціле значення  $a$ , за якого обидва корені рівняння  $x^2 - 2ax + a^2 - 4 = 0$  є недодатними.

Відповідь:

Перевірити

- 17 Знайдіть *суму* всіх цілих значень  $a$ , за кожного з яких один із коренів рівняння  $x^2 - (3a - 7)x + 2a^2 - 5a - 18 = 0$  менший від 1, а другий більший за 4.

Відповідь:

Перевірити

- 18 Знайдіть *кількість* усіх цілих значень  $a$ , за кожного з яких один із коренів рівняння  $x^2 - (3a + 2)x + 2a^2 - a - 15 = 0$  менший від 3, а другий більший за 5.

Відповідь:

Перевірити

- 19 Знайдіть *кількість* усіх цілих значень  $a$ , за кожного з яких обидва корені рівняння  $x^2 - 2x - a^2 - 2a = 0$  належать проміжку  $(-4; 5)$ .

Відповідь:

Перевірити

- 20 Знайдіть *найменше* ціле значення  $a$ , за якого обидва корені рівняння  $x^2 - (3a - 2)x + 2a^2 - 5a - 3 = 0$  належать проміжку  $[-6; 3]$ .

Відповідь:

Перевірити

- 21 Знайдіть *суму* всіх цілих значень  $a$ , за кожного з яких один із коренів рівняння  $x^2 - 4ax + 4a^2 - 9 = 0$  належить проміжку  $[-7; -1]$ , а другий – проміжку  $[3; 11]$ .

Відповідь:

Перевірити

- 22 Знайдіть *кількість* усіх цілих значень  $a$ , за кожного з яких один із коренів рівняння  $x^2 + (a - 4)x - 2a^2 - 8a = 0$  належить проміжку  $(-4; 2)$ , а другий – проміжку  $[4; 8]$ .

Відповідь:

Перевірити

- 23 Знайдіть *кількість* усіх цілих значень  $a$  з проміжку  $(-5; 5)$ , за кожного з яких один із коренів рівняння  $ax^2 + 4x - 4a + 8 = 0$  є додатним, а другий – від'ємним.

Відповідь:

Перевірити

- 24** Знайдіть *кількість* усіх цілих значень  $a$  з проміжку  $(-5; 5)$ , за кожного з яких один із коренів рівняння  $ax^2 - (5a + 2)x + 4a + 8 = 0$  не більший за 2, а другий не менший від 4.

Відповідь:

Перевірити

- 25** Знайдіть *кількість* усіх цілих значень  $a$ , за кожного з яких усі корені рівняння  $ax^2 - (2a^2 + 6)x + 12a = 0$  належать проміжку  $[-2; 6]$ .

Відповідь:

Перевірити

- 26** Знайдіть *кількість* усіх цілих значень  $a$ , за кожного з яких усі корені рівняння  $ax^2 + (a^2 - 5)x - 5a = 0$  належать проміжку  $(-5; 5)$ .

Відповідь:

Перевірити

- 27** Знайдіть *найбільше* ціле значення  $a$ , за якого один із коренів рівняння  $(a - 3)x^2 - (a^2 - 8)x + a + 3 = 0$  належить проміжку  $(-4; 0)$ , а другий – проміжку  $(2; 6)$ .

Відповідь:

Перевірити

- 28** Знайдіть *суму* всіх цілих значень  $a$ , за кожного з яких один із коренів рівняння  $(a + 4)x^2 - (a^2 - 10)x + 6a - 24 = 0$  належить проміжку  $[-3; -1]$ , а другий – проміжку  $[1; 2]$ .

Відповідь:

Перевірити

## САМОСТІЙНА РОБОТА №18

Завдання 1–4 мають по п'ять варіантів відповіді, з яких лише ОДИН ПРАВИЛЬНИЙ. Виберіть правильний варіант відповіді й позначте його.

- 1 Знайдіть *найбільше* значення  $a$ , за якого число 3 є одним із коренів рівняння  $x^2 - ax + a^2 - 13 = 0$ .

А	Б	В	Г	Д
-1	-4	4	3	1

- 2 Знайдіть корені рівняння  $x^2 - (a - 2)x - 2a = 0$ , якщо  $a \neq -2$ .

А	Б	В	Г	Д
$x = a; x = -2$	$x = a; x = 0$	$x = a + 2;$ $x = -2$	$x = -a; x = 2$	$x = a - 2;$ $x = 2$

- 3 Знайдіть множину всіх значень  $a$ , за кожного з яких обидва корені рівняння  $2x^2 - (2a + 7)x + a + 3 = 0$  є додатними.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -3)$	$(3; +\infty)$	$(0; +\infty)$	$(-\infty; 3)$	$(-3; +\infty)$

- 4 Знайдіть множину всіх значень  $a$ , за кожного з яких один із коренів рівняння  $x^2 - (2a - 2)x - 4a = 0$  належить проміжку  $(-3; 0)$ , а другий – проміжку  $(2; 4)$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 1)$	$(1; 2)$	$(4; 8)$	$(-1,5; 0)$	$(2; +\infty)$

У завданні 5 до кожного з трьох рядків інформації, позначених цифрами, доберіть один правильний, на Вашу думку, варіант, позначений буквою.

- 5** Задано рівняння  $x^2 - 2x - a^2 + 2a = 0$ , де  $x$  – змінна,  $a$  – стала. Установіть відповідність між умовою для коренів рівняння (1–3) та значенням  $a$  (А – Д), за якого ця умова виконується.

<i>Умова для коренів рівняння</i>	<i>Значення <math>a</math></i>	
1 обидва корені менші від 3	А $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$	
2 один із коренів більший за 2, а другий менший від $-1$	Б $(-1; 3)$	
3 обидва корені рівняння належать проміжку $(-1; 2)$	В $(-\infty; -1)$	
	Г $(0; 2)$	
	Д $(-\infty; 1)$	

	А	Б	В	Г	Д
1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Розв'яжіть завдання 6–7. Одержані числові відповіді запишіть у спеціально відведеному місці. Відповідь записуйте лише десятковим дробом, урахувавши положення коми. Знак «мінус» записуйте перед першою цифрою числа.

- 6** Знайдіть *кількість* усіх цілих значень  $a$ , за кожного з яких один із коренів рівняння  $x^2 - 3ax + 2a^2 + 4a - 16 = 0$  є додатним, а другий – від'ємним.

*Відповідь:*

- 7** Знайдіть *суму* найбільшого і найменшого значень  $a$ , за кожного з яких один із коренів рівняння  $a(x - a)^2 - 4(x - 2a) = a^3$  належить проміжку  $(-2; 2)$ , а другий – проміжку  $[4; 8]$ .

*Відповідь:*

**ЗАВЕРШИТИ**

**СКАСУВАТИ**

### 3 Теорема Вієта для розв'язання квадратних рівнянь з параметрами

Для того щоб визначити корені квадратного рівняння з параметром, ми знаходили спочатку дискримінант рівняння, а потім окремо кожен корінь рівняння у загальному вигляді. При цьому можна зазначити, що це займає досить багато часу.

Для знаходження коренів квадратного рівняння у загальному вигляді можна використувати теорему, обернену до теореми Вієта.

**ПРИКЛАД 1.** Знайдіть значення  $a$ , за якого рівняння  $x^2 - (a + 3)x + 3a = 0$  має лише один корінь.

#### ПРИГАДАЙТЕ

► якщо  $x_1$  і  $x_2$  – корені рівняння  $x^2 + px + q = 0$ , то  $x_1 + x_2 = -p$ ,  $x_1x_2 = q$ .

Запишемо суму і добуток коренів рівняння за теоремою Вієта	$x_1 + x_2 = a + 3,$ $x_1x_2 = 3a$
Підбираємо такі $x_1$ і $x_2$ , щоб виконались рівності $x_1 + x_2 = a + 3$ і $x_1x_2 = 3a$	$x_1 = a, x_2 = 3$
Виконаємо перевірку знайдених коренів	$x_1 + x_2 = a + 3,$ $x_1x_2 = a \cdot 3 = 3a$
Рівняння буде мати один корінь, якщо вони співпадають. Визначимо, за яких $a$ це відбувається	$x_1 = x_2,$ $a = 3$

**Відповідь:** 4. ◀

Тут ми побачили, що на питання визначення кількості коренів квадратного рівняння можна відповідати, не лише знаходячи дискримінант рівняння.

**МАТХВИЛІНКА** Знайдіть у загальному вигляді корені рівняння  $x^2 - (a - 4)x - 4a = 0$ , де  $x$  – змінна,  $a$  – стала.

**Перевірити**

А	Б	В	Г	Д
$x_1 = a,$ $x_2 = 4$	$x_1 = a - 2,$ $x_2 = 2$	$x_1 = -a,$ $x_2 = 4$	$x_1 = a - 2,$ $x_2 = -2$	$x_1 = a,$ $x_2 = -4$

**ПРИКЛАД 2.** Знайдіть множину всіх значень  $a$ , за кожного з яких рівняння  $x^2 - (3a - 1)x + 2a^2 - a = 0$  має два дійсних корені.

Запишемо суму і добуток коренів рівняння за теоремою Вієта	$x_1 + x_2 = 3a - 1,$ $x_1 x_2 = 2a^2 - a = a(2a - 1)$
Саме добуток $x_1 x_2 = a(2a - 1)$ допомагає миттєво визначити корені рівняння	$x_1 = a, x_2 = 2a - 1$
Виконаємо перевірку знайдених коренів	$x_1 + x_2 = a + 2a - 1 = 3a - 1$ $x_1 x_2 = a \cdot (2a - 1) = 2a^2 - a$
Рівняння буде мати два дійсних корені, якщо ці корені є різними. Визначимо, за яких $a$ це відбувається	$x_1 \neq x_2,$ $a \neq 2a - 1,$ $a - 2a \neq -1,$ $-a \neq -1,$ $a \neq 1$

**Відповідь:**  $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$ . ◀

**МАТХВИЛКА** Знайдіть значення  $a$ , за якого один із коренів рівняння  $x^2 - ax + 15 = 0$  дорівнює 5. Перевірити

А	Б	В	Г	Д
3	5	10	8	-3

Наступним кроком розглянемо приклади завдань, питання яких стосуються саме на вміння користуватися теоремою Вієта. Ці питання зазвичай пов'язанні з різною комбінацією коренів. Для розв'язання цих задач можна орієнтуватися на такий алгоритм:

- 1 *запишіть рівняння у стандартному вигляді:* запишіть рівняння у форматі  $ax^2 + bx + c = 0$ , де  $a, b, c$  – деякі числа або параметри;
- 2 *розгляньте особливі випадки:* розв'яжіть рівняння, якщо  $a = 0$  (у випадку, коли  $a$  – відоме число, цей пункт пропускаємо);
- 3 *запишіть суму і добуток коренів рівняння:*

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a};$$

- 4 *проаналізуйте умову завдання:* складіть рівняння або нерівність відповідно до умови завдання, використовуючи суму і добуток коренів рівняння;



- 5 *перевірте знайдені значення параметра*: знайдіть дискримінант рівняння і перевірте існування коренів при визначених значеннях параметра.

**ПРИКЛАД 3.** Знайдіть усі значення  $a$ , за кожного з яких сума коренів рівняння  $x^2 - (2a - 3)x + 2a^2 - 3a = 0$  на 10 менша від їхнього добутку. Якщо таке значення єдине, запишіть його у відповідь. Якщо таких значень кілька, то у відповідь запишіть *найбільше* з них.

Запишемо суму і добуток коренів рівняння за теоремою Вієта	$x_1 + x_2 = 2a - 3,$ $x_1 x_2 = 2a^2 - 3a$
Корені рівняння знаходити не будемо, а використаємо умову про суму і добуток коренів рівняння	$x_1 x_2 - (x_1 + x_2) = 10$
Підставимо $x_1 + x_2 = 2a - 3$ і $x_1 x_2 = 2a^2 - 3a$ , щоб знайти всі значення, за яких відбувається зазначена умова	$2a^2 - 3a - (2a - 3) = 10;$ $2a^2 - 3a - 2a + 3 = 10;$ $2a^2 - 5a - 7 = 0;$ $a_1 = -1; a_2 = 3,5$
Маємо два значення параметра. Розглянемо, чи задовольняють вони заданому рівнянню. Визначимо дискримінант рівняння	$D = (2a - 3)^2 - 4(2a^2 - 3a) =$ $= 4a^2 - 12a + 9 - 8a^2 + 12a =$ $= 9 - 4a^2$
Перевіримо кожне значення параметра, підставляючи його у знайдений дискримінант. Робимо висновок	Якщо $a = -1$ , то: $D = 9 - 4 \cdot (-1)^2 = 5 > 0;$ <i>корені існують</i>
	Якщо $a = 3,5$ , то: $D = 9 - 4 \cdot (3,5)^2 = -40 < 0;$ <i>дійсних коренів немає</i>
Маємо лише одне значення $a$ , яке задовольняє умову	$a = -1$

*Відповідь:*  $-1$ . ◀

**МАТХВИЛИНКА** Знайдіть значення  $a$ , за якого сума і добуток коренів рівняння  $x^2 - (a + 4)x + 2a - 6 = 0$  є рівними. Перевірити

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2}{3}$	10	-2	$\frac{10}{3}$	2

**ПРИКЛАД 4.** Знайдіть значення  $a$ , за якого корені  $x_1$  і  $x_2$  рівняння  $x^2 - 2x + a = 0$  задовольняють умову  $3x_1 - 2x_2 = 11$ .

Запишемо суму і добуток коренів рівняння за теоремою Вієта	$x_1 + x_2 = 2,$ $x_1x_2 = a$
Не визначаємо корені рівняння. Виразимо $x_2$ з рівності $x_1 + x_2 = 2$	$x_2 = 2 - x_1$
Підставимо $x_2 = 2 - x_1$ у рівність $3x_1 - 2x_2 = 11$ та розв'яжемо рівняння	$3x_1 - 2(2 - x_1) = 11;$ $3x_1 - 4 + 2x_1 = 11;$ $5x_1 = 15;$ $x_1 = 3$
Визначимо значення $x_2$	$x_2 = 2 - x_1 = 2 - 3 = -1$
Знайдемо значення $a$ , підставивши $x_1 = 3$ і $x_2 = -1$ у рівність $x_1x_2 = a$	$3 \cdot (-1) = a,$ $a = -3$
Перевіримо існування коренів рівняння при $a = -3$ . Робимо висновок	$x^2 - 2x - 3 = 0,$ $D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) =$ $= 4 + 12 = 16 > 0$

Відповідь:  $-3$ . ◀

**МАТХВИЛІНКА** Укажіть проміжок, якому належить значення  $a$ , за якого корені  $x_1$  і  $x_2$  рівняння  $x^2 - 3x - 2a = 0$  задовольняють умову  $2x_1 + 5x_2 = 3$ . Перевірити

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -3]$	$(-3; -1]$	$(-1; 0]$	$(0; 1]$	$(1; +\infty)$

**ПРИКЛАД 5.** Знайдіть усі значення  $a$ , за кожного з яких рівняння  $x^2 - (2a^2 - 3a + 1)x + a - 3 = 0$  має протилежні корені. Якщо таке значення єдине, запишіть його у відповідь. Якщо таких значень кілька, то у відповідь запишіть їхню суму.

Запишемо суму і добуток коренів рівняння за теоремою Вієта	$x_1 + x_2 = 2a^2 - 3a + 1,$ $x_1x_2 = a - 3$
Якщо корені $x_1$ і $x_2$ є протилежними числами, то їхня сума має дорівнювати 0	$x_1 + x_2 = 0;$ $2a^2 - 3a + 1 = 0;$ $a_1 = 0,5; a_2 = 1$

## Закінчення таблиці

Перевіримо кожне значення параметра, підставляючи його у початкове рівняння. Робимо висновок	Якщо $a = 0,5$ , то: $x^2 - (2 \cdot 0,5^2 - 3 \cdot 0,5 + 1)x + 0,5 - 3 = 0;$ $x^2 - 2,5 = 0;$ $x^2 = 2,5$ $x = \pm\sqrt{2,5}$
	Якщо $a = 1$ , то: $x^2 - (2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1)x + 1 - 3 = 0;$ $x^2 - 2 = 0;$ $x^2 = 2$ $x = \pm\sqrt{2}$
Маємо два значення параметра. Визначимо їхню суму	$0,5 + 1 = 1,5$

Відповідь: 1,5. ◀

**МАТХВИЛИНКА** Укажіть проміжок, якому належить значення  $a$ , за якого корені рівняння  $x^2 - (2a - 5)x - 3a = 0$  є протилежними числами. Перевірити

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -3]$	$(-3; 0]$	$(0; 3]$	$(3; 5]$	$(5; +\infty)$

**ПРИКЛАД 6.** Знайдіть *найменше* значення  $a$ , за якого сума квадратів коренів рівняння  $x^2 + 4x - a^2 - 3a = 0$  дорівнює 36.

Запишемо суму і добуток коренів рівняння за теоремою Вієта	$x_1 + x_2 = -4,$ $x_1x_2 = -a^2 - 3a$
Не визначаємо корені рівняння. Запишемо суму квадратів за допомогою квадрата суми і добутку коренів	$x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_2 =$ $= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$
Підставимо $x_1 + x_2 = -4$ і $x_1x_2 = -a^2 - 3a$ у $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$ та прирівняємо його до 36 відповідно до умови завдання	$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 36;$ $(-4)^2 - 2(-a^2 - 3a) = 36;$ $16 + 2a^2 + 6a = 36;$ $a^2 + 3a - 10 = 0;$ $a_1 = -5; a_2 = 2$
Обираємо найменше значення параметра	$a_{\min} = -5$

Відповідь: -5. ◀

**МАТХВИЛИНКА** Знайдіть *найбільше* значення  $a$ , за якого сума квадратів коренів рівняння  $x^2 - 4ax + 1 = 0$  дорівнює 34. Перевірити

А	Б	В	Г	Д
3,5	3	2,5	2	1,5

**ПРИКЛАД 7.** Знайдіть *найбільше* значення  $a$ , за якого один із коренів рівняння  $x^2 - (3a - 3)x + 27 = 0$  на 6 більший за інший.

Запишемо суму і добуток коренів рівняння за теоремою Вієта	$x_1 + x_2 = 3a - 3,$ $x_1 x_2 = 27$
Не визначаємо корені рівняння. Якщо один із коренів рівняння на 6 більший від іншого, то $x_1 - x_2 = 6$	$x_1 = x_2 + 6$
Підставимо $x_1 = x_2 + 6$ в $x_1 x_2 = 27$ та розв'яжемо отримане рівняння	$x_1 x_2 = 27;$ $(x_2 + 6)x_2 = 27;$ $x_2^2 + 6x_2 - 27 = 0;$ $(x_2)_1 = -9; (x_2)_2 = 3$
Знаходимо відповідні значення $x_1$	$(x_1)_1 = (x_2)_1 + 6 = -9 + 6 = -3$
	$(x_1)_2 = (x_2)_2 + 6 = 3 + 6 = 9$
Знайдемо значення $a$ , підставивши $x_1$ і $x_2$ у рівність $x_1 + x_2 = 3a - 3$	<i>Перший випадок</i> $-3 + (-9) = 3a - 3;$ $-12 = 3a - 3;$ $a = -3$
	<i>Другий випадок</i> $9 + 3 = 3a - 3;$ $12 = 3a - 3;$ $a = 5$
Обираємо найбільше значення параметра	$a_{\max} = 5$

*Відповідь:* 5. ◀

**МАТХВИЛИНКА** Знайдіть *найменше* значення  $a$ , за якого один із коренів рівняння  $x^2 - (2a + 1)x + 18 = 0$  на 3 більший за інший. Перевірити

А	Б	В	Г	Д
-3	-4	-5	-6	-7

ПЕРЕВІРТЕ СВОЮ КОМПЕТЕНТНІСТЬ

- 1 Знайдіть суму коренів рівняння  $x^2 - (a + 2)x + 4a - 8 = 0$ , якщо  $a \neq 6$ .

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

- 2 Знайдіть добуток коренів рівняння  $x^2 - 2ax + a^2 - 4 = 0$ .

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

- 3 Знайдіть корені рівняння  $x^2 + (3a - 2)x - 6a = 0$ , якщо  $a \neq -\frac{2}{3}$ .

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

- 4 Знайдіть корені рівняння  $x^2 - (2a + 1)x + a^2 + a = 0$ .

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

- 5 Знайдіть значення  $a$ , за якого сума коренів рівняння  $x^2 - (3a + 2)x - 5a + 4 = 0$  дорівнює 14.

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

- 6 Знайдіть значення  $a$ , за якого добуток коренів рівняння  $x^2 - (2a + 5)x + 4a - 3 = 0$  дорівнює 21.

Відповідь:

Перевірити

Скасувати

- 7 Знайдіть значення  $a$ , за якого рівняння  $x^2 - (3a - 3)x - 9a = 0$  має лише один корінь.

Відповідь:

Перевірити

- 8 Знайдіть кількість усіх цілих значень  $a$  з проміжку  $[-5; 5]$ , за кожного з яких рівняння  $x^2 - (2a + 6)x + 10a + 5 = 0$  має два різні корені.

Відповідь:

Перевірити

- 9** Знайдіть значення  $a$ , за якого одним із коренів рівняння  $x^2 - 6x + a = 0$  є число 4.

*Відповідь:*

Перевірити

- 10** Знайдіть значення  $a$ , за якого одним із коренів рівняння  $x^2 + ax + 12 = 0$  є число 3.

*Відповідь:*

Перевірити

- 11** Знайдіть значення  $a$ , за якого добуток коренів рівняння  $x^2 - (3a + 5)x + 2a - 1 = 0$  на 4 більший за їхню суму.

*Відповідь:*

Перевірити

- 12** Знайдіть значення  $a$ , за якого сума коренів рівняння  $x^2 - (2a - 7)x - a + 9 = 0$  на 1 менша від їх добутку.

*Відповідь:*

Перевірити

- 13** Знайдіть значення  $a$ , за якого корені  $x_1$  і  $x_2$  рівняння  $x^2 + 4x + a = 0$  задовольняють умову  $x_1 + 4x_2 = 2$ .

*Відповідь:*

Перевірити

- 14** Знайдіть значення  $a$ , за якого корені  $x_1$  і  $x_2$  рівняння  $x^2 - 3x + a = 0$  задовольняють умову  $2x_1 - x_2 = 12$ .

*Відповідь:*

Перевірити

- 15** Знайдіть значення  $a$ , за якого корені рівняння  $x^2 + (3a - 9)x + a - 4 = 0$  є протилежними числами.

*Відповідь:*

Перевірити

- 16** Знайдіть значення  $a$ , за якого корені рівняння  $x^2 - (2a + 8)x + a + 1 = 0$  є протилежними числами.

*Відповідь:*

Перевірити

- 17** Знайдіть значення  $a$ , за якого сума квадратів коренів рівняння  $x^2 - 5x + 3a - 4 = 0$  дорівнює 15.

*Відповідь:*

Перевірити

- 18** Знайдіть значення  $a$ , за якого сума квадратів коренів рівняння  $x^2 + 6x - 2a + 7 = 0$  дорівнює 46.

*Відповідь:*

Перевірити

- 19** Знайдіть значення  $a$ , за якого один із коренів рівняння  $x^2 - 5x + 2a = 0$  на 3 більший за інший.

*Відповідь:*

Перевірити

- 20** Знайдіть значення  $a$ , за якого один із коренів рівняння  $x^2 + 9x + a - 4 = 0$  на 5 менший від іншого.

*Відповідь:*

Перевірити

- 21** Знайдіть усі значення  $a$ , за кожного з яких добуток коренів рівняння  $x^2 - (2a - 1)x + a^2 - 3a + 4 = 0$  на 11 більший за їхню суму. Якщо таке значення  $a$  одне, запишіть його у відповідь. Якщо таких значень  $a$  кілька, то у відповідь запишіть їх *добуток*.

*Відповідь:*

Перевірити

- 22** Знайдіть усі значення  $a$ , за кожного з яких сума коренів рівняння  $x^2 + (a + 2)x - a^2 + 5a + 2 = 0$  на 9 менша від їх добутку. Якщо таке значення  $a$  одне, запишіть його у відповідь. Якщо таких значень  $a$  кілька, то у відповідь запишіть *найменше* з них.

*Відповідь:*

Перевірити

- 23** Знайдіть усі значення  $a$ , за кожного з яких корені  $x_1$  і  $x_2$  рівняння  $x^2 - ax + 6 = 0$  задовольняють умову  $2x_1 - x_2 = 1$ . Якщо таке значення  $a$  одне, запишіть його у відповідь. Якщо таких значень  $a$  кілька, то у відповідь запишіть *найменше* з них.

*Відповідь:*

Перевірити

- 24 Знайдіть усі значення  $a$ , за кожного з яких корені  $x_1$  і  $x_2$  рівняння  $x^2 - ax - 15 = 0$  задовольняють умову  $x_1 + 2x_2 = -1$ . Якщо таке значення  $a$  одне, запишіть його у відповідь. Якщо таких значень  $a$  кілька, то у відповідь запишіть *найбільше* з них.

Відповідь:

Перевірити

- 25 Знайдіть усі значення  $a$ , за кожного з яких корені  $x_1$  і  $x_2$  рівняння  $x^2 - (a + 2)x + a + 1 = 0$  задовольняють умову  $2x_1 - 5x_2 = 7$ . Якщо таке значення  $a$  одне, запишіть його у відповідь. Якщо таких значень  $a$  кілька, то у відповідь запишіть їх *добуток*.

Відповідь:

Перевірити

- 26 Знайдіть усі значення  $a$ , за кожного з яких корені  $x_1$  і  $x_2$  рівняння  $x^2 - (a - 3)x - 2a + 2 = 0$  задовольняють умову  $3x_1 + 4x_2 = 10$ . Якщо таке значення  $a$  одне, запишіть його у відповідь. Якщо таких значень  $a$  кілька, то у відповідь запишіть їхню *суму*.

Відповідь:

Перевірити

- 27 Знайдіть усі значення  $a$ , за кожного з яких корені рівняння  $x^2 - (2a^2 - a - 15)x + 3a - 4 = 0$  є протилежними числами. Якщо таке значення  $a$  одне, запишіть його у відповідь. Якщо таких значень  $a$  кілька, то у відповідь запишіть *найбільше* з них.

Відповідь:

Перевірити

- 28 Знайдіть усі значення  $a$ , за кожного з яких корені рівняння  $x^2 - (5a^2 + 8a - 4)x + 2a + 3 = 0$  є протилежними числами. Якщо таке значення  $a$  одне, запишіть його у відповідь. Якщо таких значень  $a$  кілька, то у відповідь запишіть їхню *суму*.

Відповідь:

Перевірити



- 29 Знайдіть усі значення  $a$ , за кожного з яких сума квадратів рівняння  $x^2 - (2a - 1)x + 5a + 6 = 0$  дорівнює 7. Якщо таке значення  $a$  одне, запишіть його у відповідь. Якщо таких значень  $a$  кілька, то у відповідь запишіть *найбільше* з них.

Відповідь:

Перевірити

- 30 Знайдіть усі значення  $a$ , за кожного з яких сума квадратів рівняння  $x^2 - (a + 2)x - 4a + 9 = 0$  дорівнює 14. Якщо таке значення  $a$  одне, запишіть його у відповідь. Якщо таких значень  $a$  кілька, то у відповідь запишіть *найменше* з них.

Відповідь:

Перевірити

- 31 Знайдіть усі значення  $a$ , за кожного з яких один із коренів рівняння  $x^2 - (2a - 6)x - 4a - 1 = 0$  на 10 більший за інший. Якщо таке значення  $a$  одне, запишіть його у відповідь. Якщо таких значень  $a$  кілька, то у відповідь запишіть їх *добуток*.

Відповідь:

Перевірити

- 32 Знайдіть усі значення  $a$ , за кожного з яких один із коренів рівняння  $x^2 + (a + 1)x - 5a + 3 = 0$  на 8 менший від іншого. Якщо таке значення  $a$  одне, запишіть його у відповідь. Якщо таких значень  $a$  кілька, то у відповідь запишіть їхню *суму*.

Відповідь:

Перевірити

## САМОСТІЙНА РОБОТА №19

Завдання 1–5 мають по п'ять варіантів відповіді, з яких лише ОДИН ПРАВИЛЬНИЙ. Виберіть правильний варіант відповіді й позначте його.

1 Знайдіть корені рівняння  $x^2 - (a + 6)x + 3a + 9 = 0$ , якщо  $a \neq 0$ .

А	Б	В	Г	Д
$x_1 = 2a + 3,$ $x_2 = a + 3$	$x_1 = a + 3,$ $x_2 = 3$	$x_1 = a - 3,$ $x_2 = 3$	$x_1 = a - 3,$ $x_2 = -3$	$x_1 = a - 9,$ $x_2 = 1$

2 Укажіть проміжок, якому належить значення  $a$ , за якого сума коренів рівняння  $x^2 + 2ax - 3a = 0$  дорівнює 12.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -5]$	$(-5; -2]$	$(-2; 2]$	$(2; 5]$	$(5; +\infty)$

3 Знайдіть значення  $a$ , за якого одним із коренів рівняння  $x^2 - 7x - a = 0$  є число 3.

А	Б	В	Г	Д
4	-30	12	-4	-12

4 Знайдіть множину всіх значень  $a$ , за кожного з яких рівняння  $x^2 + (a + 9)x - 2a^2 + 18a = 0$  має два дійсних корені.

А	Б	В	Г	Д
$\{-3\}$	$(3; +\infty)$	$\{3\}$	$(-\infty; 3)$	$(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$

5 Знайдіть значення  $a$ , за якого корені  $x_1$  і  $x_2$  рівняння  $x^2 - 10x + a = 0$  задовольняють умову  $2x_1 = 3x_2$ .

А	Б	В	Г	Д
6	12	24	10	4

У завданні 6 до кожного з трьох рядків інформації, позначених цифрами, доберіть один правильний, на Вашу думку, варіант, позначений буквою.

- 6** Задано рівняння  $x^2 - (2a - 6)x - 8 = 0$ , де  $x$  – змінна,  $a$  – стала. Установіть відповідність між умовою для коренів рівняння (1–3) та значенням  $a$  (А – Д), за якого ця умова виконується.

<i>Умова для коренів рівняння</i>	<i>Значення <math>a</math></i>																									
<b>1</b> корені рівняння є протилежними числами	А $-1$ Б $2$	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th></th> <th>А</th> <th>Б</th> <th>В</th> <th>Г</th> <th>Д</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <th>1</th> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> </tr> <tr> <th>2</th> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> </tr> <tr> <th>3</th> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> </tr> </tbody> </table>		А	Б	В	Г	Д	1						2						3					
	А		Б	В	Г	Д																				
1																										
2																										
3																										
<b>2</b> сума коренів рівняння дорівнює їх добутку	В $3$ Г $2; 4$																									
<b>3</b> один із коренів рівняння на 6 більший за інший	Д $4$																									

Розв'яжіть завдання 7–8. Одержані числові відповіді запишіть у спеціально відведеному місці. Відповідь записуйте лише десятковим дробом, урахувавши положення коми. Знак «мінус» записуйте перед першою цифрою числа.

- 7** Знайдіть *найбільше* значення  $a$ , за якого сума квадратів коренів рівняння  $x^2 - (a - 2)x + a = 0$  дорівнює 31.

*Відповідь:*

- 8** Знайдіть *додатне* значення  $a$ , за якого один із коренів рівняння  $x^2 - (2a - 2)x + 4a - 3 = 0$  на 4 більший за інший.

*Відповідь:*

**ЗАВЕРШИТИ**

**СКАСУВАТИ**

# ЗМІСТ

<b>РОЗДІЛ 1. ПОВТОРЕННЯ</b> .....	4
РІВНЯННЯ .....	4
Лінійні рівняння .....	4
Квадратні рівняння.....	11
Раціональні рівняння.....	22
Рівняння, що розв'язуються методом заміни змінної.....	32
СИСТЕМИ РІВНЯНЬ.....	39
Системи лінійних рівнянь .....	39
Системи рівнянь другого степеня .....	51
НЕРІВНОСТІ ТА ЇХ СИСТЕМИ.....	61
Лінійні нерівності .....	61
Системи лінійних нерівностей .....	70
Квадратні нерівності.....	78
Метод інтервалів.....	87
<b>РОЗДІЛ 2. ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ, НЕРІВНОСТІ ТА ЇХ СИСТЕМИ З ПАРАМЕТРАМИ</b> ..	96
ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ З ПАРАМЕТРАМИ .....	96
Існування коренів рівняння залежно від параметра.....	96
Оцінювання коренів рівняння залежно від параметра .....	105
СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ПАРАМЕТРАМИ.....	113
Існування розв'язків системи рівнянь залежно від параметра... ..	113
Оцінювання розв'язків системи рівнянь залежно від параметра.. ..	122
ЛІНІЙНІ НЕРІВНОСТІ ТА ЇХ СИСТЕМИ З ПАРАМЕТРАМИ .....	132
Лінійні нерівності з параметрами.....	132
Системи лінійних нерівностей з параметрами.....	143
<b>РОЗДІЛ 3. КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ З ПАРАМЕТРАМИ</b> .....	156
КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ З ПАРАМЕТРАМИ .....	156
Існування коренів рівняння залежно від параметра.....	156
Оцінювання коренів рівняння залежно від параметра .....	165
Теорема Вієта для розв'язання квадратних рівнянь з параметрами .....	176

# STUDINFO

## Даний матеріал було завантажено з STUDINFO

**STUDINFO** – це платформа, яка допомагає абітурієнтам обрати найкращий ЗВО для вступу, відстежити перебіг вступної кампанії та оцінити свою ймовірність вступу до всіх ЗВО України. Ми збираємо актуальні дані і рейтинги та подаємо це в зручному персоналізованому форматі для кожного користувача, щоб зробити вступ простішим.

 Більше матеріалів для підготовки: <https://studinfo.org/>

 Приєднуйтесь до нашого Telegram-каналу: <https://t.me/studinfoua>

## Telegram-канали про освіту та підготовку до НМТ



Щоденник абітурієнта  
<https://t.me/abitblog>



Математика з ЩА  
<https://t.me/abimath>



Матеріали з ЩА  
<https://t.me/abitdocs>



Українська мова з ЩА  
<https://t.me/abitmova>